

VILNIAUS UNIVERSITETO
TEORINĖS FIZIKOS IR ASTRONOMIJOS INSTITUTAS

Miglius Alaburda

**TAŠKINIŲ PROCESŲ $1/f$ TRIUKŠMO
MODELIAVIMAS**

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, fizika (02 P), matematinė ir bendroji teorinė fizika,
klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija,
statistinė fizika, termodinamika (190 P)

Vilnius, 2005

Disertacija rengta 1999 – 2004 metais Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute.

Mokslinis vadovas:

- prof. habil. dr. Bronislovas Kaulakys (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Fizikos mokslo krypties taryboje.

Pirmininkas:

- prof. habil. dr. Romualdas Karazija (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)

Nariai:

- habil. dr. Gediminas Juzeliūnas (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- dr. Eugenijus Gaižauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- habil. dr. Antanas Čenys (Puslaidininkų fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)
- prof. habil. dr. Arvydas Matulionis (Puslaidininkų fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, puslaidininkų fizika – 265 P)

Oponentai:

- prof. habil. dr. Feliksas Ivanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)
- prof. habil. dr. Ramūnas Katilius (Puslaidininkų fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P)

Disertacija bus ginama viešame Fizikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2005 m. birželio 28 d. 15 val. Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute, A. Goštauto g. 12, 01108 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2005 m. gegužės 27 d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje (Universiteto g. 3, 01513 Vilnius, Lietuva) ir Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos instituto bibliotekoje (A. Goštauto g. 12, 01108 Vilnius, Lietuva).

Įvadas

Daugelyje sistemų – nuo astrofizikos ir technologijų iki socialinių ir psichologijos – žemų dažnių spektrinis tankis $S(f)$ yra atvirkščiai proporcingas dažniui f . Tokia dažnio priklausomybė gali pasižymėti ir nuo laiko priklausantys reiškiniai, ir erdvinės eilutės. Ilgą laiką stebimas susidomėjimas universaliu $1/f$ triukšmu.

$1/f$ triukšmas yra tarpinis procesas tarp balto triukšmo (kai nėra laikinės signalo koreliacijos, $S(f) \sim 1/f^0$) ir Brauno judesio (nėra koreliacijos tarp pokyčių, $S(f) \sim 1/f^2$). Šiuos signalus integruojant ar diferencijuojant $1/f$ triukšmas nėra gaunamas.

Dažnai $1/f$ triukšmas pastebimas analizuojant srovių arba signalų intensyvumus. Tokiu atveju nagrinėjamos pakankamai sudėtingos, dažniausiai netiesinės, diferencialinių lygčių su dalinėmis išvestinėmis sistemos arba signalai, sudaryti iš dedamųjų su plačiame diapazone pasiskirsčiusiais tiesinės relaksacijos laikais sumos. Tokiais metodais gautų signalų intensyvumai dažniausiai yra aprašomi Gauso skirstiniais. Tačiau ne visi signalai, pasižymintys $1/f$ triukšmu, turi tokius skirstinius. Kai kurie iš jų yra ne Gauso tipo, turi laipsninius skirstinius arba būna netgi fraktaliniai.

Kai kurie $1/f$ triukšmu pasižyminčius procesus generuojantys matematiniai modeliai ir algoritmai turi trūkumų – jie yra labai specifiniai, formalūs (pavyzdžiui, trupmeninis Brauno judesys) ar netgi nefizikiniai, todėl dažniausiai analitiškai neišsprendžiami, neatskleidžia nei kilmės, nei pakankamų sąlygų atsirasti $1/f$ fliktuacijoms.

Kodėl $1/f$ triukšmas pasireiškia įvairiose sistemose, yra vienas iš šiuolaikinės fizikos galvosūkių. Lyginant su iš tiesinių stochastinių lygčių gaunamu Brauno judesiu, $1/f$ triukšmą generuojančios paprastos diferencialinės, netgi tiesinės stochastinės lygtys, nėra žinomos.

Dauguma fizikinių $1/f$ triukšmo modelių yra specializuoti arba sudėtingi ir nepaaiškina procesų su $1/f^\beta$ spektriniu tankiu paplitimo įvairiose sistemose.

Kai kurie atsitiktiniai reiškiniai atsiranda diskretiniais laikais ar diskretinėse vietose ir pasižymi vienodais individualiais įvykiais. Stochastinis taškinis procesas yra įvykius atsitiktiniais taškais erdvėje ar laike vaizduojanti matematinė konstrukcija. Taškiniai procesai stebimi įvairiose fizikinėse, ekonominėse, ekologinėse, neurologinėse, seismologinėse sistemose, internete, telekomunikacijų tinkluose – sistemose, kuriose stebimas taškinių objektų (elektronų, fotonų, automobilių, impulsų) srautas arba vienas po kito vykstančių įvykių seka, pavyzdžiui, seisminiai virpesiai, finansų rinkų sandoriai, širdies dūžiai, interneto paketai.

Taškinis procesas yra visiškai aprašomas įvykių laikais $\{t_k\}$ arba intervalų tarp impulsų seka $\tau_k = t_{k+1} - t_k$. Toks taškinis procesas gali būti vadinamas fraktaliniu, jei statistinės savybės pasižymi laipsnine priklausomybe ir nekinta pakeitus mastelį. Tai rodo, kad yra susidarę taškų klasteriai dideliuose laiko intervaluose.

Norint išsamiai aprašyti stochastinį procesą reikia apskaičiuoti visas galimas įvairių įvykių sąlygines tikimybes. Skirtingos statistikos papildo proceso aprašymą. Viena statistika negali pilnai apibūdinti stochastinio proceso. Fraktalinių stochastinių taškinių procesų statistika nekinta pakeitus mastelį, tačiau fraktalinės spartos stochastiniai taškiniai procesai aprašomi dažnio funkcijomis, kurios yra fraktalinės arba jų pokyčiai yra fraktaliniai [1, 2, 3].

Laipsninis taškinių procesų laikų tarp impulsų skirstinys sąlygoja laipsninį stochastinio signalo intensyvumo skirstinį. Šis reiškinys stebimas įvairiuose procesuose – žemės drebėjimuose, fizikinėse sistemose kritinio taško aplinkoje, finansinių laikų sekose, internete. Laipsninių skirstinių negalima paaiškinti intuityviai. Iki Lévy darbų [4, 5]

atsitiktinių kintamųjų su begaliniais pokyčiais pavyzdžiai buvo laikomi paradokais. Šiais laikais laipsniniai skirstiniai naudojami atvirų sistemų aprašymuose. Nors ir tiksliai matematiškai apibrėžti tokio skirstinio stochastiniai procesai, juos sunku pritaikyti realiose sistemose. Baigtinių pokyčių mastelio keitimo lygtimis didelėje, bet baigtinėje laiko skalėje aprašyti apriboti Lévy procesai yra dirbtiniai ir ne visiškai pagrįsti.

Naujausi darbai parodo, kad dauguma laipsninių skirstinių nėra stabilioje Lévy srityje, jie nėra Lévy stabilūs ir nėra invariantiniai sumos operacijai. Todėl stebimas susidomėjimas naujais stochastiniais modeliais su tolimomis koreliacijomis ir asimptotine laipsnine forma.

Stochastinis taškinis laikus tarp įvykių aprašantis modelis turi tik keletą parametrų, sąlygojančių sistemos statistines savybes – laipsninį skirstinį ir spektrinį tankį. Šis modelis gali pasižymėti laipsniniu spektriniu tankiu, kurio nuožulnumas yra tarp 0,5 ir 1,5.

Pagrindiniai darbo tikslai

1. Apibendrinant taškinio vyksmo modelį sugeneruoti signalus su skirtingais spektrinio tankio $S(f) \sim 1/f^\beta$ polinkiais β ir laipsniniu signalo intensyvumo pasiskirstymu.
2. Ištirti taškinio vyksmo $1/f$ triukšmo modelio sąryšį su Bernamont-Surdin-McWorter modeliu, aprašančiu signalą, sudarytą iš dedamųjų su plačiame diapazone pasiskirsčiusiais tiesinės relaksacijos laikais sumos, ir ištirti generuojamų signalų fraktališkumą.
3. Ištirti $1/f$ triukšmą generuojančio taškinio vyksmo modelio ryšį su fluktuojančios amplitudės signalu ir išvesti $1/f$ triukšmu pasižyminčius signalus generuojančias netiesines stochastines skirtumines ir diferencialines lygtis.
4. $1/f$ triukšmo vyksmų modeliavimas ir analizė skirtingos trukmės stochastiniais impulsais, perėjimas nuo taškinių vyksmų prie tolydžių signalų ir taškinių vyksmų generavimas iš tolydžių signalų.
5. $1/f$ triukšmo paieška chaotinėse hamiltoninėse sistemose – rotoriuje, veikiamame periodinių smūgių, ir klasikiniame vandenilio atome, patalpintame elektromagnetiniame lauke, kurių dinamiką aprašo atitinkami judėjimo lygčių atvaizdai.

Mokslinis naujumas

1. Taškinio autoregresinio $1/f$ triukšmo modelio apibendrinimas įvairiems spektrinio tankio $S(f) \sim 1/f^\beta$ polinkiams β ir jo statistinių savybių lyginimas su iš dedamųjų su plačiame diapazone pasiskirsčiusiais tiesinės relaksacijos laikais sumos sudaryto signalo savybėmis.
2. Ištirtas autoregresinio $1/f^\beta$ triukšmo taškinių vyksmų ir McWorter modelių fraktališkumas. Parodyta, kad vienu atveju signalas multifraktalinis, kitu – monofraktalinis.
3. Išvestos ir skaitmeniškai išanalizuotos stochastinės diferencialinės lygtys, generuojančios signalus su įvairaus polinkio β spektriniu tankiu $1/f^\beta$ ir laipsniniu signalo intensyvumo skirstiniu.

4. Vandeniliško atomo elektrono sąveikos su elektromagnetiniu lauku energijos ir judesio kiekio momento kitimo rekurentinių sąryšių išvedimas ir periodo $1/f^\beta$ fliktuacijų suradimas bei skaitinė analizė.
5. Sukurta programinė įranga, leidžianti modeliuoti įvairius taškinius procesus, signalus ir tirti jų intensyvumo skirstinius, spektrinius tankius, fraktališkumą ir kitas charakteristikas.

Ginamieji teiginiai

1. Apibendrintas $1/f$ triukšmo taškinis modelis generuoja skirtingų polinkių $0,5 \lesssim \beta \lesssim 1,5$ spektrinio tankio $S(f) \sim 1/f^\beta$ signalus ir sąlygoja stochastinių signalų laipsninį pasiskirstymą, stebimą įvairiuose vyksmuose – nuo žemės drebėjimų ir interneto iki finansų rinkų.
2. Autoregresinis $1/f^\beta$ triukšmo taškinių vyksmų modelis, vaizduojantis signalą, sudarytą iš Brauno judesiu kintančių laikų tarp impulsų, papildoma signalo, sudaryto iš dedamųjų su plačiame diapazone pasiskirsčiusiais tiesinės relaksacijos laikais sumos, modelį. Nekoreliuotų sandų suminio signalo intensyvumas yra Gauso skirstinys, o taškinio vyksmo intensyvumas asimptotiškai yra laipsninis skirstinys.
3. Sugeneruoti taškinių vyksmų signalai yra multifraktaliniai, o iš nekoreliuotų sandų sudaryti signalai – monofraktaliniai.
4. Pasiūlytos ir išanalizuotos stochastinės laikų tarp impulsų dinamikos modelių transformacijos į fliktuojančio intensyvumo signalus nekeičia žemų dažnių spektrinio tankio.
5. Išvestos klasikinio vandenilio atomo elektromagnetiniame lauke energijos ir judesio kiekio momento pokyčių išraiškos ir elektrono judėjimą aprašantys atvaizdai tinka dinamikos chaotiškumo analizei. Parodyta, kad netiesinių hamiltoninių sistemų pereinamojoje nuo reguliarios prie chaotinės dinamikos srityje sistemos periodo fliktuacijos gali būti $1/f^\beta$ pobūdžio.

Asmeninis autoriaus indėlis

Disertacijoje pateikti skaitinio modeliavimo rezultatai yra atlikti šio darbo autoriaus. Autorius taip pat dalyvavo ir daugumos analizinių rezultatų išvedimuose, ypač gaudamas sudėtingas išraiškas, aprašančias chaotinę dinamiką hamiltoninėse sistemose, analizuojant artutinių išraiškų atitikimą skaitinių eksperimentų rezultatams. Jis sukūrė programinę įrangą, leidžiančią modeliuoti įvairius taškinius ir stochastinius signalus, tirti jų intensyvumo skirstinius, spektrinius tankius, fraktališkumą ir kitas statistines savybes.

Darbo struktūra ir turinys

Disertacijos apimtis – 106 puslapiai. Joje yra 30 iliustracijų. Darbas susideda iš įvado, literatūros apžvalgos, šešių skyrių, išvadų ir literatūros sąrašo.

Įvadas

Įvade suformuluotas darbo aktualumas, pagrindiniai darbo tikslai, mokslinis naujumas ir ginamieji teiginiai.

Literatūros apžvalga

Šiame skyriuje pateiktas teorinis įvadas bei literatūros apžvalga, paaiškinantys disertacijos tyrimų kontekstą.

Taškiniai procesai

Šiame skyriuje analizuojami iš atsitiktinių impulsų arba elementarių įvykių $A_k(t - t_k)$ sekos sudaryti signalai. Tokio proceso ar srovės stiprumo signalas išreiškiamas kaip

$$I(t) = \sum_k A_k(t - t_k), \quad (1)$$

kur $A_k(\phi)$ vaizduoja k -ojo impulso formą. Impulsų formos įtakoja spektrinį tankį dideliems dažniams, o impulsų amplitudės fliktuacijos sąlygoja baltąjį arba Lorencio formos, bet ne $1/f$ triukšmą [6]. Todėl apsiribojame laikų tarp įvykių t_k fliktuacijų tyrimu. Šiame artėjime impulsus $A_k(t - t_k)$ pakeičiame Dirako delta funkcijomis $\delta(t - t_k)$. Šis modelis gali būti taikomas vienodų objektų – elektronų, fotonų, automobilių ar kitų dalelių judėjimui arba įvykių sekoms analizuoti. Taškinio proceso spektrinis tankis yra

$$S(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{2}{T} \left| \int_{t_i}^{t_f} I(t) e^{-i2\pi f t} dt \right|^2 \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{2\bar{a}^2}{T} \sum_k \sum_{q=k_{\min}-k}^{k_{\max}-k} e^{i2\pi f \Delta(k;q)} \right\rangle, \quad (2)$$

kur \bar{a} – vidutinis vieno impulso indėlis į srautą, T – visas stebėjimo laikas, o

$$\Delta(k;q) \equiv t_{k+q} - t_k = \sum_{i=k}^{k+q-1} \tau_i \quad (3)$$

yra skirtumas tarp impulsų laikų t_{k+q} ir t_k . $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ yra laiko intervalai tarp gretimų impulsų, $\langle \dots \rangle$ vaizduoja proceso realizacijų vidurkinimą.

Atsitiktinių (Puasono) tarp impulsų laikų seka generuoja baltąjį triukšmą [6]. Laikų seka t_k su atsitiktiniais pokyčiais $t_k = t_{k-1} + \bar{\tau} + \sigma \varepsilon_k$, kur $\bar{\tau}$ yra vidutinis laikas tarp impulsų, $\{\varepsilon_k\}$ žymi nekoreliuotus Gauso atsitiktinius dydžius (baltąjį triukšmą), o σ – baltojo triukšmo intensyvumas, sąlygoja Lorencio formos spektrinį tankį [7]. Šiame darbe analizuojamos laikų tarp impulsų $\tau_k = t_k - t_{k-1}$ sekos su atsitiktiniais pokyčiais $\tau_k = \tau_{k-1} + \sigma \varepsilon_k$. Begalinį Brauno judesio didėjimą galime apriboti, įvesdami relaksacijos link vidurkio $\bar{\tau}$ spartą γ . Analizuojamos rekurentinės lygtys

$$\begin{aligned} t_k &= t_{k-1} + \tau_k, \\ \tau_k &= \tau_{k-1} - \gamma(\tau_{k-1} - \bar{\tau}) + \sigma \varepsilon_k. \end{aligned} \quad (4)$$

Dažnių srityje $f \ll f_\tau = (2\pi\bar{\tau})^{-1}$ ir $f < f_2 = 2\sqrt{\gamma}/\pi\sigma$ šio taškinio proceso spektrinis tankis yra

$$S(f) = 2\bar{a}\bar{I} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i2\pi f \bar{\tau} q - \pi^2 f^2 \sigma^2 g(q)} dq, \quad (5)$$

kur \bar{I} – vidutinė signalo vertė, o

$$g(q) = \frac{2}{\gamma^2} \left\{ q - \frac{(1-\gamma)[1-(1-\gamma)^q]}{1-(1-\gamma)^2} \{2 + [1-(1-\gamma)^q](1-\gamma)^{2k+1}\} \right\}. \quad (6)$$

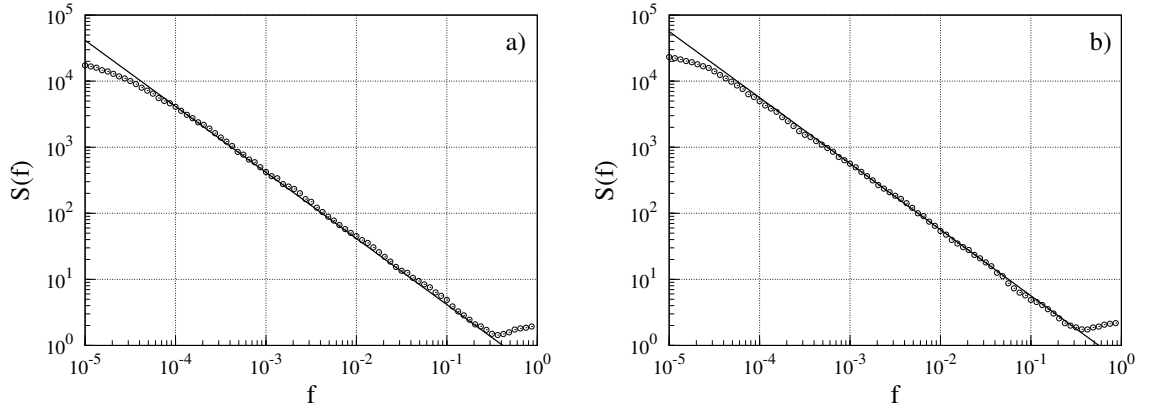
Kai $f \gg f_1 = \gamma^{3/2}/\pi\sigma$, funkciją $g(q)$ skleidžiame eilute ir gauname $1/f$ spektrinį tankį

$$S(f) = 2\bar{a}\bar{I} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[i2\pi f\bar{\tau}q - \frac{(\pi f\sigma)^2}{\gamma} q^2 \right] dq = \bar{I}^2 \frac{\alpha_H}{f}, \quad f_1 < f < f_2, f_\tau, \quad (7)$$

kur α_H – bedimensinė konstanta (Hugo parametras)

$$\alpha_H = \frac{2}{\sqrt{\pi}} K e^{-K^2}, \quad K = \frac{\bar{\tau}}{\sqrt{2}\sigma_\tau} = \frac{\bar{\tau}\sqrt{\gamma}}{\sigma}. \quad (8)$$

Taškinio proceso (4) spektrinis tankis pavaizduotas 1 a) paveiksle.



1 pav. Taškinio proceso (4) su $\sigma = 0,01$ ir $\gamma = 0,0001$ spektrinis tankis, kai: a) $\{\varepsilon_k\}$ pasiskirstę pagal Gauso skirstinį ir b) $\{\varepsilon_k\}$ pasiskirstę tolygiai. Apskritimai vaizduoja skaitmeninio modeliavimo rezultatus, ištiesinės linijos – spektrinius tankius (7) ir (9)

Analizuojant ne tik Gauso atsitiktinių dydžių $\{\varepsilon_k\}$ skirstinius gaunama apibendrinta spektrinio tankio išraiška

$$S(f) \simeq 2\bar{a}\bar{I}P_k(0)/f, \quad (9)$$

kur $P_k(\tau_k)$ yra laikų tarp impulsų τ_k skirstinys. Signalu, generuojamu su tolygiai pasiskirsčiusiais ε_k , spektrinis tankis pavaizduotas 1 b) paveiksle.

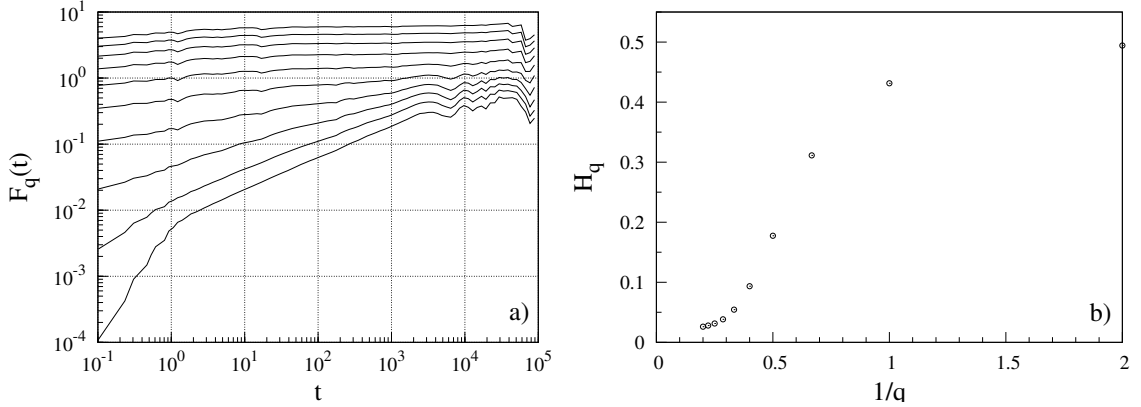
Skaitmeniškai apskaičiuotos apibendrintos q -os eilės pokyčių koreliacinės funkcijos

$$F_q(t) = \langle |I(t' + t) - I(t')|^q \rangle^{1/q} \quad (10)$$

ir apibendrintos q -os eilės Hursto eksponentės

$$F_q(t) \sim t^{H_q} \quad (11)$$

pateiktos 2 paveiksle. Hursto eksponenčių priklausomybė nuo q patvirtina, kad taškinis procesas (4) yra multifraktalinis [8,3]. Multifraktališkumas aprašo įvairias nuo mastelio nepriklausančių modelių savybes.



2 pav. Taškinio proceso (4) apibendrintos q -os eilės pokyčių koreliacinės funkcijos ir apibendrintos q -os eilės Hursto eksponentės priklausomybė nuo $1/q$

Žemų dažnių srityje spektrinį tankį lemia signalo statistinės savybės ilgiems laikams. Toliau analizuojamas kitas taškinis modelis, kuriame laikų tarp įvykių trukmės τ_k priklausomybė nuo įvykio numerio k nusakoma Lanževeno lygties

$$\frac{d\tau_k}{dk} = h(\tau_k) + g(\tau_k)\xi(k) \quad (12)$$

su dreifo $h(\tau_k)$ ir triukšmo $g(\tau_k)\xi(k)$ koeficientais. Įvykio numeris k laikomas tolydžiu kintamuoju, o Gauso triukšmas $\xi(k)$ tenkina standartinę sąlygą $\langle \xi(k)\xi(k') \rangle = \delta(k - k')$. Laipsninės formos spektrinį tankį labai dažnai sąlygoja kitų charakteristikų laipsninė priklausomybė [1, 2], todėl dreifo koeficientas ir τ_k skirstinys parenkami laipsninės formos:

$$h(\tau_k) = \gamma\tau_k^\delta, \quad P_k(\tau_k) = C\tau_k^\alpha, \quad \tau_{\min} \leq \tau_k \leq \tau_{\max}. \quad (13)$$

Čia γ yra signalo relaksacijos koeficientas. Tokiam signalui įvedus pažymėjimus $\kappa = \frac{\alpha}{2-\delta} - \frac{1}{2}$,

$$f_0 = \frac{\gamma}{\pi}(C\bar{\tau})^{\frac{2-\delta}{\alpha}}, \quad f_1 = \frac{\gamma}{\pi\tau_{\max}^{2-\delta}}, \quad f_2 = \frac{\gamma}{\pi\tau_{\min}^{2-\delta}}, \quad (14)$$

dažnių srityje $f_1 \ll f \ll f_2$, kai $-1 < \kappa < 1/2$ gaunamas spektrinis tankis

$$S(f) = \frac{\Gamma(1 + \kappa)\bar{I}^2}{\sqrt{\pi}(2 - \delta) \cos[(\kappa/2 + 1/4)\pi]} \left(\frac{f_0}{f}\right)^{\kappa + \frac{1}{2}}, \quad (15)$$

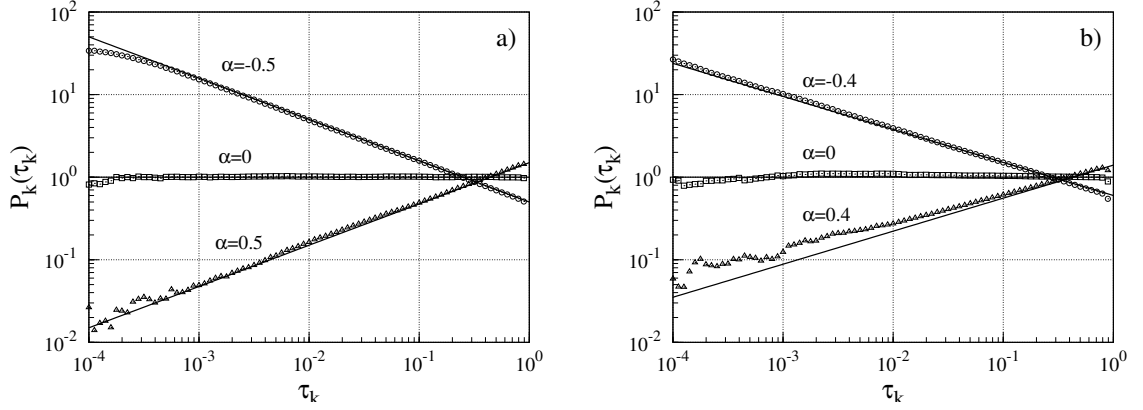
tai yra $S(f) \sim 1/f^{1+\frac{\alpha}{2-\delta}}$. Gavome spektrinį triukšmo tankį $1/f^\beta$, kurio polinkis β gali būti plačiame dažnių diapazone tarp 0,5 ir 1. Labai dideliems dažniams $f \gg \tau_{\max}^{-1}$ (2) lygtyje sumos keisti integravimu negalime, todėl gauname šratinį triukšmą $S(f) = 2\bar{a}\bar{I}$.

Paprasčiausias ir geriausiai žinomas taškinis procesas, pasižymintis laipsniniu τ_k skirstiniu, yra stochastinis procesas su $g(\tau_k) = \sigma\tau_k^\mu$ ir $\delta = 2\mu - 1$, t. y.,

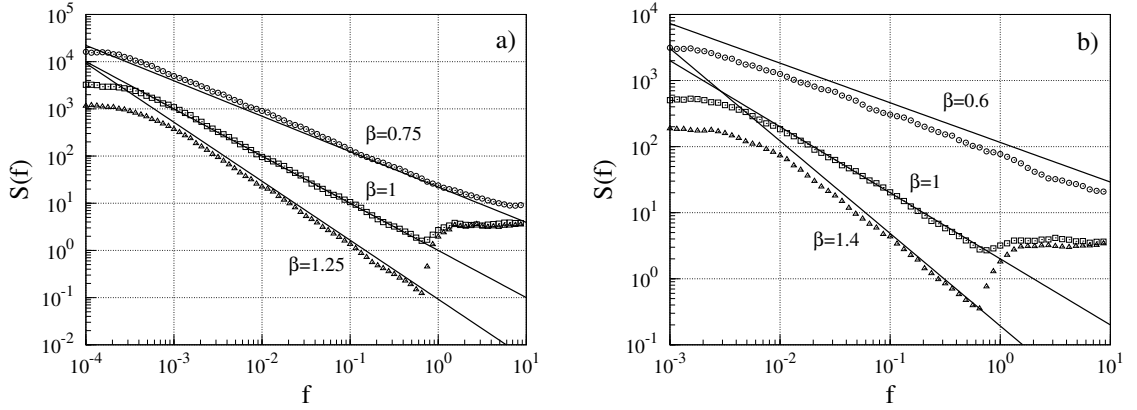
$$\tau_{k+1} = \tau_k + \gamma\tau_k^{2\mu-1} + \sigma\tau_k^\mu \varepsilon_k. \quad (16)$$

Procesą (16) atitinkančios stacionariosios Fokerio-Planko lygties sprendinys τ_k skirstiniui k erdvėje yra

$$P_k(\tau_k) = \frac{1 + \alpha}{\tau_{\max}^{1+\alpha} - \tau_{\min}^{1+\alpha}} \tau_k^\alpha, \quad \alpha = \frac{2\gamma}{\sigma^2} - 2\mu. \quad (17)$$



3 pav. Skirstiniai $P_k(\tau_k)$, gauti iš (16) lygties sprendinio su parametrais: a) $\mu = 0,5$, $\sigma = 0,02$ ir skirtingomis relaksacijos vėrtėmis: $\gamma = 0,0001$ (apskritimai), $0,0002$ (kvadratai), $0,0003$ (trikampiai); ir b) $\mu = 1$, $\sigma = 0,1$ ir $\gamma = 0,008$ (apskritimai), $0,01$ (kvadratai), $0,012$ (trikampiai). Ištinės linijos vaizduoja skirstinius, apskaičiuotus pagal (17) lygtį



4 pav. Pagal (16) lygtį generuoto signalo spektrinio tankio (2) priklausomybė nuo dažnio. Parametrų vėrtės tokios pat, kaip 3 paveiksle. Ištinės linijos vaizduoja analizinius rezultatus, apskaičiuotus pagal (18) lygtį

Šio taškinio proceso spektrinis tankis, kai $f_1 \ll f \ll f_2$, yra

$$S(f) = \frac{(2 + \alpha)(\beta - 1)\bar{a}^2\Gamma(\beta - 1/2)}{\sqrt{\pi}\alpha(\tau_{\max}^{2+\alpha} - \tau_{\min}^{2+\alpha})\sin(\pi\beta/2)} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\beta-1} \frac{1}{f^\beta}, \quad (18)$$

kur

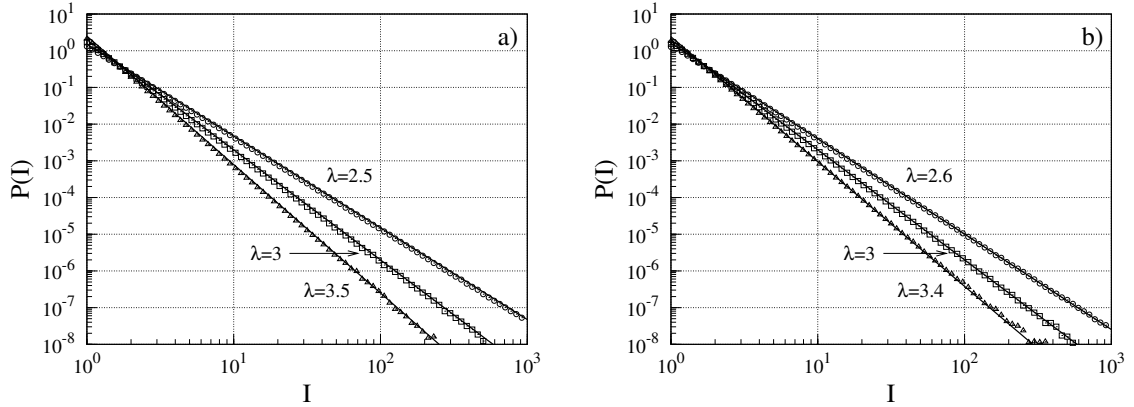
$$\beta = 1 + \frac{\alpha}{3 - 2\mu}, \quad \frac{1}{2} < \beta < 2. \quad (19)$$

Atlikus kintamųjų pakeitimą $dt = \tau_k dk$ ir perėjus iš k erdvės prie realaus laiko, signalo intensyvumo skirstinys yra

$$P(I) = \frac{\lambda - 1}{\tau_{\max}^{\lambda-1} - \tau_{\min}^{\lambda-1}} \frac{\bar{a}^{\lambda-1}}{I^\lambda}, \quad \lambda = 3 + \alpha. \quad (20)$$

Toliau analizuojami du skirtingi atvejai. Kai $\mu = 1$, gauname multiplikatyvinį procesą, kuriam stochastinis laiko tarp impulsų pokytis proporcingas laikui tarp impulsų. Kitu atveju, kai $\mu = 1/2$, gauname Lanževano lygtį realiaame laike

$$\frac{d\tau}{dt} = \gamma \frac{1}{\tau} + \sigma \xi(t), \quad (21)$$



5 pav. Signalų intensyvumo skirstiniai $P(I)$. Parametų vertės tokios pat, kaip 3 paveiksle. Ištinės linijos, vaizduojančios analizinius rezultatus, apskaičiuotos pagal (20) lygtį

tai yra laikų tarp impulsų Brauno judesį su tiesine signalo relaksacija. Šių atvejų τ_k skirstiniai, spektriniai tankiai ir signalo intensyvumo skirstiniai pavaizduoti 3, 4 ir 5 paveiksluose.

Tiesinės relaksacijos signalų suma

Šiame skyriuje analizuojami signalai $I_l(t)$, gauti iš stochastinės diferencialinės lygties

$$\dot{I}_l = -\gamma_l(I_l - \bar{I}_l) + \sigma_l \xi_l(t) \quad (22)$$

su įvairiais tiesinės relaksacijos laikais $\tau_l^{rel} = 1/\gamma_l$. Lygties sprendinys yra

$$I_l(t) = \int_0^t e^{-\gamma_l(t-t')} [\gamma_l \bar{I}_l + \sigma_l \xi_l(t')] dt'. \quad (23)$$

Signalų spektrinį tankį aprašo Lorencio formulė

$$S_l(f) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T C_l(s) e^{i2\pi f s} ds = \frac{2\sigma_l^2}{\gamma_l^2 + (2\pi f)^2} + 2\delta(f) \bar{I}_l^2, \quad (24)$$

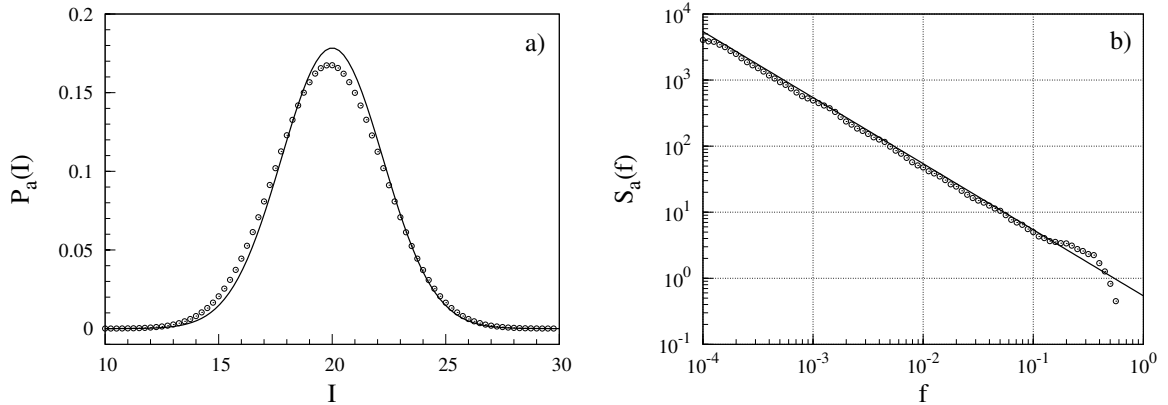
o signalo intensyvumą – Gauso skirstinys

$$P_l(I_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_I^{(l)}} \exp \left\{ -\frac{(I_l - \bar{I}_l)^2}{2\sigma_I^{(l)2}} \right\}, \quad (25)$$

kur $\sigma_I^{(l)} = \sigma_l / \sqrt{2\gamma_l}$. Signalų vertės laiko momentais $I_l^{(k)}(k\Delta t)$ generuojamos naudojantis rekurentiniu sąryšiu

$$I_l^{(k)} = I_l^{(k-1)} - \gamma_l(I_l^{(k-1)} - \bar{I}_l)\Delta t + \sigma_l \varepsilon_l^{(k)} \sqrt{\Delta t} \quad (26)$$

ir panaudojant greitąją Furjė transformaciją apskaičiuojamas signalo spektrinis tankis.



6 pav. a) Skaitmeniškai apskaičiuotas suvidurkinto signalo (22) – (27) skirstinys (apskritimai). Ištininė linija vaizduoja (30) teorinį Gauso skirstinį; b) skaitmeninis spektrinis tankis, apskaičiuotas naudojant greitąją Furjė transformaciją (apskritimai) ir teorinė ištininė kreivė, apskaičiuota pagal (29) lygtį

Signalą su $1/f$ triukšmu galima gauti analizuojant signalų su tiesinės relaksacijos laikais sumą arba vidurkį

$$I_a(t) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N I_l(t). \quad (27)$$

Atskiri signalo sandai su skirtingais relaksacijos laikais turi būti nekoreliuoti tarpusavyje [9, 10]. Įvedę relaksacijos spartų γ tankį $g(\gamma)$ apskaičiuojame signalų sumos spektrinį tankį. Tada

$$S(f) = \frac{1}{\pi f} \int_{\gamma_{\min}/\omega}^{\gamma_{\max}/\omega} \frac{\sigma^2(\omega x)g(\omega x)}{1+x^2} dx, \quad \omega = 2\pi f. \quad (28)$$

$1/f$ spektrinis tankis gaunamas, kai $\sigma^2(\omega x)g(\omega x) = \sigma^2(\gamma)g(\gamma) = A = const$. Išlaikant šią sąlygą sudėtinio signalo vidurkio spektrinis tankis yra

$$S_a(f) \simeq \frac{A}{2N^2 f}, \quad (29)$$

o vidurkis ir dispersija išreiškiami formulėmis

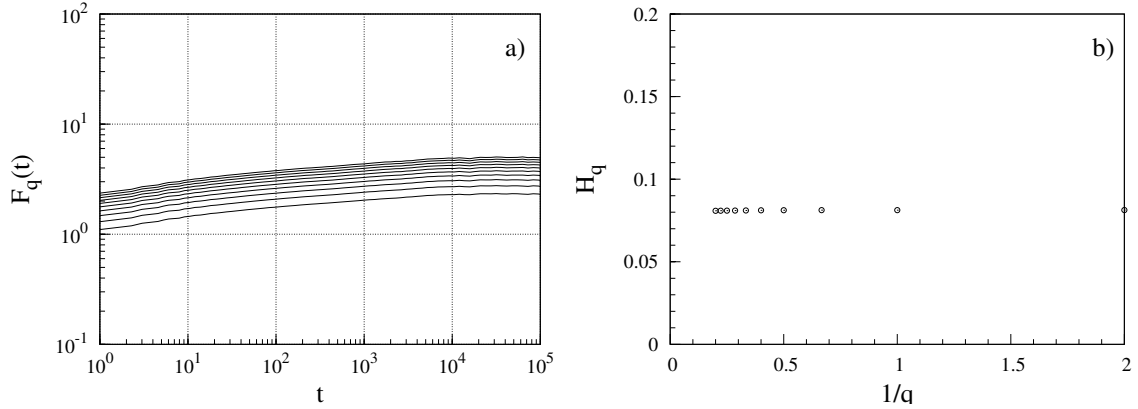
$$\bar{I}_a = \frac{1}{N} \sum_l \bar{I}_l, \quad \sigma_a^2 = \frac{1}{N^2} \sum_l \frac{\sigma_l^2}{2\gamma_l}. \quad (30)$$

(22) – (27) skirstinys ir spektrinis tankis pateikti 6 paveiksle.

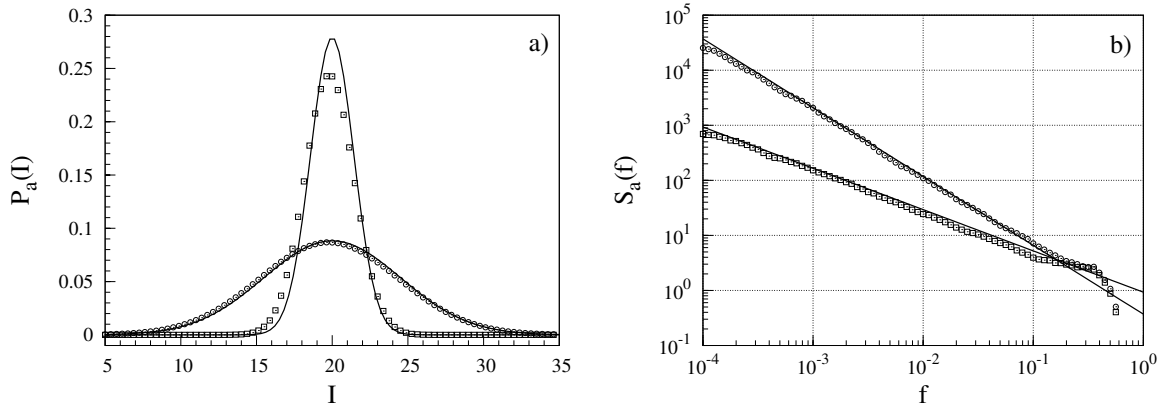
Skaitmeniškai ištirtas tiesinės relaksacijos signalų vidurkio fraktališkumas ir gauta Hursto eksponentės nepriklausa nuo $1/q$ pateikta 7 paveiksle. Tai rodo šio signalo monofraktališkumą.

Tyrinėjant tiesinės relaksacijos signalų vidurkį galima gauti ne tik $1/f$ triukšmą, bet ir skirtingo polinkio $1/f^\beta$ spektrinius tankius. Pasiūlytas metodas analizuoti atvejį, kai išlaikomas ryšys

$$\sigma^2(\gamma)g(\gamma) = A\gamma^\eta. \quad (31)$$



7 pav. Tiesinės relaksacijos signalų vidurkio apibendrintos q -os eilės pokyčių koreliacinės funkcijos ir apibendrintos q -os eilės Hursto eksponentės priklausomybė nuo $1/q$



8 pav. a) Signalų skirstinys ir b) spektrinis tankis išlaikant (31) sąlygą. Apskritimai vaizduoja skaitmeninį modeliavimą kai $\eta = -0,25$, kvadratai atitinka $\eta = 0,25$. Išsines linijos vaizduoja (33) ir (32) lygtis

Čia A ir η yra parenkami parametrai. Riboję, kai $\gamma_{\min} \rightarrow 0$ ir $\gamma_{\max} \rightarrow \infty$, iš (28) formulės gauname spektrinį tankį

$$S_a(f) \simeq \frac{(2\pi)^\eta A}{2N^2 \cos(\pi\eta/2)} \frac{1}{f^{1-\eta}}. \quad (32)$$

Parinkdami $\eta = 1 - \beta$ gauname iš anksto parinktas spektrinio tankio polinkio β vertes. Signalų skirstinys aprašomas Gauso formule

$$P_a(I_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_a} \exp\left\{-\frac{(I - \bar{I}_a)^2}{2\sigma_a^2}\right\}, \quad (33)$$

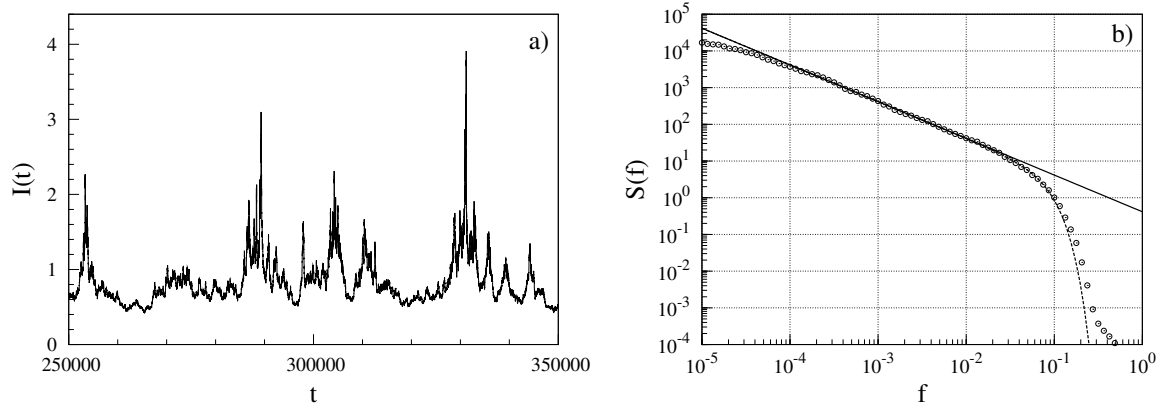
kur dispersija σ_a^2 yra

$$\sigma_a^2 = \frac{A(\gamma_{\max}^\eta - \gamma_{\min}^\eta)}{2N^2\eta}. \quad (34)$$

Šio signalų skirstinys ir spektrinis tankis pateikti 8 paveiksle. Palyginę 8 ir 4 paveikslus matome, kad skirtingos prigimties procesai – multiplikatyvus stochastinis procesas ir tiesinės relaksacijos signalų vidurkis – generuoja $1/f^\beta$ triukšmą, nors jų signalų skirstiniai yra skirtingi: vieno – laipsninis, o kito – Gauso. Multiplikatyvus procesas

nerikalauja plataus relaksacijos laikų pasiskirstymo, todėl yra bendresnis ir gali būti naudojamas aprašant iš impulsų sudarytus stochastinius signalus.

Tolydus signalas



9 pav. Signalas (35) a) pavyzdys ir b) spektrinis tankis (apskritimai). Ištininė linija vaizduoja (5) lygties sprendinį, o punktyrine linija pavaizduotos (36) formulės vertės

Šiame skyriuje tyrinėjami tolydūs iš impulsų sudaryti stochastiniai signalai. Taškiniame procese (4) Dirako delta funkcijos pakeičiamos vienodos formos impulsais. Iš pradžių analizuojami Gauso formos impulsai ir signalas išreiškiamas tokia suma:

$$I(t) = \bar{a} \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_p} \exp \left\{ -\frac{(t - t_k)^2}{2\sigma_p^2} \right\}. \quad (35)$$

Tokiam signalui gautas spektrinis tankis

$$S(f) = S_\delta(f) S_\sigma(f), \quad (36)$$

kur

$$S_\delta(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{2\bar{a}^2}{T} \left| \sum_k e^{-i2\pi f t_k} \right|^2 \right\rangle \quad (37)$$

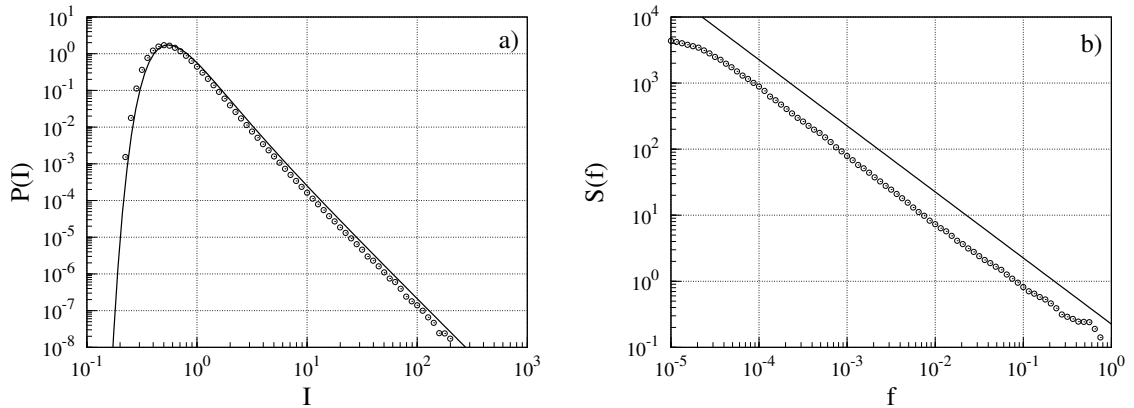
ir

$$S_\sigma(f) = e^{-(2\pi f \sigma_p)^2}. \quad (38)$$

Skaitmeniškai modeliuotas signalas ir jo spektrinis tankis pateikti 9 paveiksle. Palyginus su taškiniu procesu stebime Gauso formos impulsų įtaką didelių dažnių srityje – spektrinis tankis „nupjaunamas“, o nupjovimo dažnio vertę apsprendžia impulso plotis σ_p .

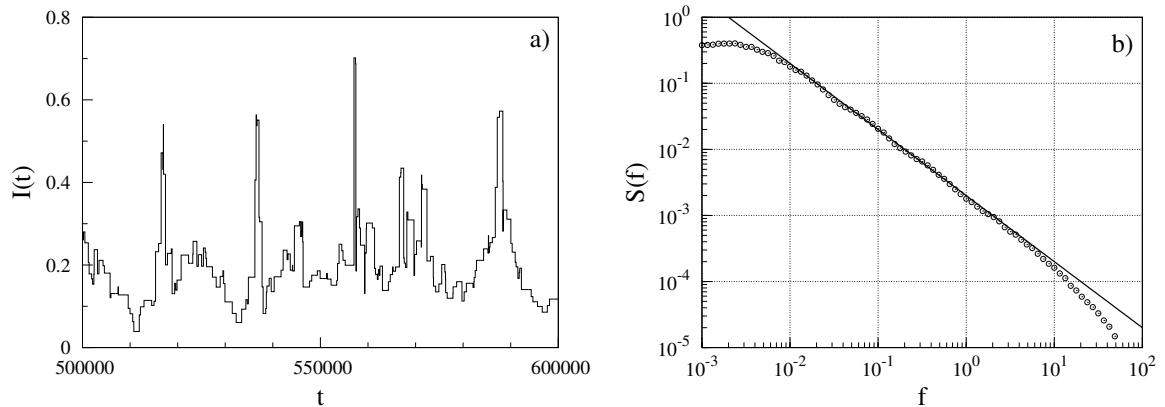
Kitas pasiūlytas metodas – pagaminti tolydų stochastinį signalą iš taškinio proceso naudojant skirtingos formos impulsus, bet išlaikant vienodą jų plotą. Tokiu atveju vieno impulso vidutinė įtaka signalui išlieka nepakitusi. Paprasčiausias tokių impulsų formos pavyzdys – stačiakampiai. Modeliuojant naudojami stačiakampiai impulsai, kurių trukmė lygi $\tau_k = t_k - t_{k-1}$, o aukštis atitinkamai lygus \bar{a}/τ_k . Signalas, pagaminto iš stačiakampių impulsų, intensyvumo skirstinys

$$P(I) = \frac{K\bar{I}^2}{\sqrt{\pi}I^3} \exp \left\{ -\frac{\gamma\bar{a}^2}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\bar{I}} - \frac{1}{I} \right)^2 \right\}. \quad (39)$$



10 pav. Signalo, sudaryto iš stačiakampių impulsų, a) skirstinys ir b) spektrinis tankis. Apskritimai vaizduoja skaitmeniškai gautus rezultatus, o ištisinės linijos – analizinius rezultatus

Signalo skirstinys ir spektrinis tankis pavaizduoti 10 paveiksle. Skaitmeniškai gautas mažesnis spektrinio tankio intensyvumas, nes generuojant taškinį procesą buvo pritaikyta atspindinti kraštinė sąlyga taške $\tau_k = 0$.



11 pav. Iš vienodo ploto stačiakampių impulsų pagaminto signalo a) pavyzdys ir b) spektrinis tankis. Impulsų trukmės pasiskirsčiusios tolygiai, o laikai tarp impulsų pasiskirstę pagal Puasono skirstinį. Apskritimai vaizduoja skaitmeninį modeliavimą, o ištisinė linija – (44) analizinį rezultatą

Toliau analizuojamas atvejis, kai laikai tarp impulsų pasiskirstę pagal Puasono skirstinį $P(\tau) = \frac{1}{\tau} \exp\{-\frac{\tau}{\tau}\}$. Šiuo atveju spektrinis tankis išreiškiamas formule

$$S(f) = 2\bar{\nu} \langle |F_k(\omega)|^2 \rangle, \quad (40)$$

kur $F_k(\omega)$ yra k -ojo impulso Furjė transformacija, o $\bar{\nu}$ – impulsų skaičius laiko vienetu. Pasiūlyta apibendrinta impulsų forma

$$A_k(t) = T_k^\rho A\left(\frac{t}{T_k}\right), \quad (41)$$

kur T_k – santykinė impulso trukmė, o $A(t)$ – impulso formą aprašanti funkcija. Vertė $\rho = 0$ atitinka vienodo aukščio impulsus, o $\rho = -1$ vienodo ploto impulsus. Signalų

spektrinės charakteristikos analizuojamos analiziškai. Pasirinkus laipsninį impulsų trukmės skirstinį

$$P(T_k) = \begin{cases} \frac{\alpha+1}{T_{\max}^{\alpha+1} - T_{\min}^{\alpha+1}} T_k^\alpha, & T_{\min} \leq T_k \leq T_{\max}, \\ 0, & \text{kitais atvejais,} \end{cases} \quad (42)$$

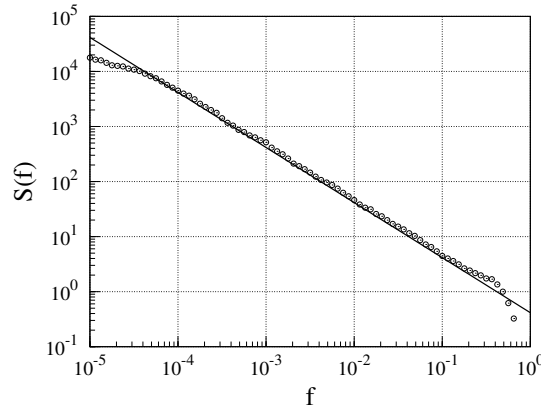
ir kai tenkinamos sąlygos $\alpha > -1$, $\frac{1}{T_{\max}} \ll \omega \ll \frac{1}{T_{\min}}$ ir $\alpha + 2\rho + 4 = 0$, gauname $1/f$ spektrinį tankį

$$S(f) \approx \frac{2\bar{\nu}(\alpha+1)\omega}{(T_{\max}^{\alpha+1} - T_{\min}^{\alpha+1})} \int_0^\infty |F(u)|^2 \frac{du}{u^2}. \quad (43)$$

Kai $T_{\min} \ll T_{\max}$ ir $\alpha > -1$, išvedame spektrinio tankio išraišką

$$S(f) \simeq \frac{\bar{\nu} \bar{a}^2}{f T_{\max}}. \quad (44)$$

11 paveiksle pavaizduotas signalo pavyzdys ir spektrinis tankis.



12 pav. Apskritimai vaizduoja signalo, gauto skaičiuojant taškinio proceso įvykius pasirinktuose intervaluose, spektrinį tankį, ištisinė linija – pradinio taškinio proceso analizinį spektrinį tankį

Gauti tolydų stochastinį procesą iš taškinio proceso galima ir nenaudojant impulsų. Dažnai finansų rinkose naudojamas metodas, kai visas stebėjimo laikas padalijamas į vienodo ilgio intervalus ir signalo intensyvumo vertė pasirinktame intervale prilyginama taškinio proceso įvykių tame intervale skaičiui [11, 12]. Šis metodas taikomas skaitmeniškai analizuojant labai didelius informacijos kiekius, pavyzdžiui, kelerių metų ar dešimtmečių sandorių laikus. 12 paveiksle pateiktas spektrinis tankis, gautas pritaikius šią metodiką (4) taškiniam procesui.

Tolydus signalas iš taškinio gali būti gaunamas ne tik panaudojus įvairios formos impulsus, bet ir įvedus signalo intensyvumą kaip atvirkštinių trukmių tarp impulsų dydį $\nu_k = 1/\tau_k$. Signalo intensyvumas taškiniam procesui (4) išreiškiamas rekurentiniu sąryšiu

$$\nu_k = \frac{\nu_{k-1}}{|1 - \gamma(1 - \bar{\nu}^{-1}\nu_{k-1}) + \sigma\nu_{k-1}\varepsilon_k|}. \quad (45)$$

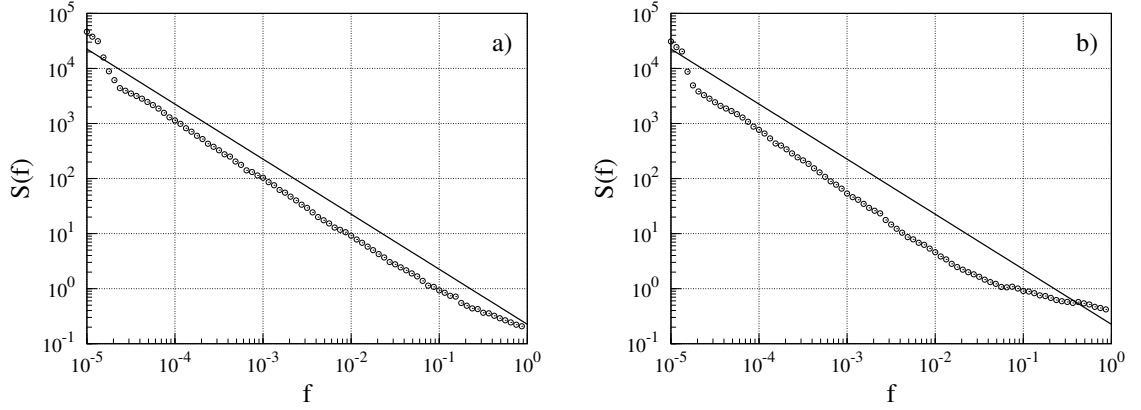
Pritaikę Itô kintamųjų pakeitimo formulę, išvedame rekurentinę skirtuminę lygtį signalo intensyvumui

$$\nu_k = \left| \nu_{k-1} + \gamma\nu_{k-1}(1 - \bar{\nu}^{-1}\nu_{k-1}) + \sigma^2\nu_{k-1}^3 + \sigma\nu_{k-1}^2\varepsilon_k \right|. \quad (46)$$

Šią lygį atitinka netiesinė Itô diferencialinė realaus laiko lygtis

$$\frac{d\nu}{dt} = \gamma\nu^2(1 - \bar{\nu}^{-1}\nu) + \sigma^2\nu^4 + \sigma\nu^{5/2}\xi(t). \quad (47)$$

Skirtuminių lygčių spektriniai tankiai pavaizduoti 13 paveiksle.



13 pav. a) (45) lygties ir b) (46) lygties generuotų signalų spektriniai tankiai. Apskritimai vaizduoja skaitmeninius rezultatus, o ištisinės linijos – pradinio taškinio proceso analizinį spektrinį tankį

Grižtame prie multiplikatyvaus taškinio proceso

$$\tau_{k+1} = \tau_k + \gamma\tau_k^{2\mu-1} + \sigma\tau_k^\mu\varepsilon_k. \quad (48)$$

Jį perrašom kaip diferencialinę Itô stochastinę lygtį, skaičių k interpretuodami kaip tolydų kintamąjį

$$\frac{d\tau_k}{dk} = \sigma\xi(k), \quad (49)$$

ir kintamąjį k pakeičiame realiu laiku t . Įvedę signalo vidurkį laiko intervale τ_k

$$x = \frac{\bar{a}}{\tau_k}, \quad (50)$$

gauname netiesinę stochastinę diferencialinę lygtį

$$\frac{dx}{dt} = (\sigma^2 - \gamma)\frac{x^{4-2\mu}}{a^{3-2\mu}} + \frac{\sigma x^{5/2-\mu}}{a^{3/2-\mu}}\xi(t). \quad (51)$$

Begalinį signalo didėjimą arba mažėjimą apribojame eksponentiškai ir, įvedę redukuotą laiką t_s ir naujus parametrus

$$\eta = \frac{5}{2} - \mu, \quad \Gamma = 1 - \frac{\gamma}{\sigma^2}, \quad (52)$$

gauname netiesinę stochastinę diferencialinę lygtį

$$\frac{dx}{dt_s} = \frac{m}{2} \left(\frac{x_{\min}^m}{x^{m+1-2\eta}} - \frac{x^{m-1+2\eta}}{x_{\max}^m} \right) + \Gamma x^{2\eta-1} + x^\eta \xi(t_s), \quad (53)$$

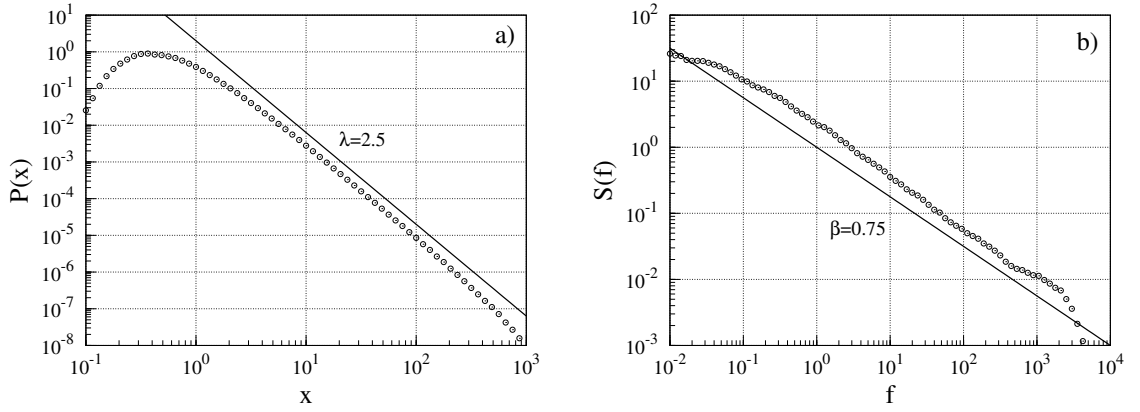
generuojančią signalus su

$$S(f) \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 2 - \frac{2\Gamma + 1}{2\eta - 2} \quad (54)$$

spektriniu tankiu. Šios diferencialinės lygties sprendinio – stochastinio signalo skirstinys randamas išsprendus atitinkamą stacionariąją Fokero-Planko lygtį, t. y.

$$P(x) \sim \frac{1}{x^\lambda}, \quad \lambda = 2(\eta - \Gamma). \quad (55)$$

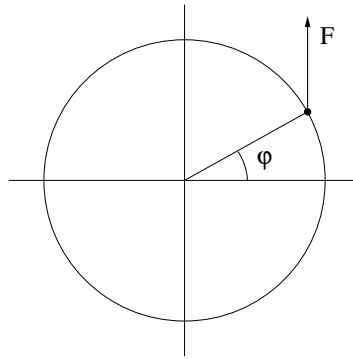
Skaitmeniškai integruojant (53) lygtį naudojami kintami integravimo žingsniukai h_i , tokie, kad signalo pokyčiai būtų proporcingi pačiam kintamajam, t. y. h_i gaunami iš sąryšio $x_i^\eta \sqrt{h_i} = \kappa x_i$, kur $\kappa \ll 1$ yra mažas parametras. Rezultatai pateikti 14 paveiksle.



14 pav. Apskritimai vaizduoja skaitmeniškai modeliuotą (53) lygties kintamojo x a) skirstinį ir b) spektrinį tankį. Tolygios kreivės vaizduoja analizinius rezultatus (55) ir (54). Naudoti parametrai: $x_{\min} = 1$, $x_{\max} = 10^3$, $m = 1$, $\Gamma = 0,75$, $\eta = 2$ ir $\kappa = 0,1$

Hamiltoninės sistemos

Šiame skyriuje gaunamas $1/f$ triukšmas įvairiose hamiltoninėse sistemose perėjimo nuo reguliarios prie chaotinės dinamikos srityje. Viena paprasčiausių sistemų, pasižyminčių chaotinėmis savybėmis, yra periodiškai smūgiuojamas rotorius su trintimi, pavaizduotas 15 paveiksle. Rotoriaus judėjimas aprašomas



15 pav. Periodiškai smūgiuojamas rotorius

$$\ddot{\varphi} + \Gamma \dot{\varphi} = F \equiv K f(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (56)$$

lygtimi, kur n – sveikas skaičius, Γ žymi trinties matą, laiko periodas tarp smūgių yra T , f – jėga, judesio kiekio momentas prilygintas vienetui, o φ yra kampinė koordinatė. Atlikus kintamųjų pakeitimą (56) lygtis transformuojasi į netiesinių pirmos eilės diferencialinių lygčių sistemą

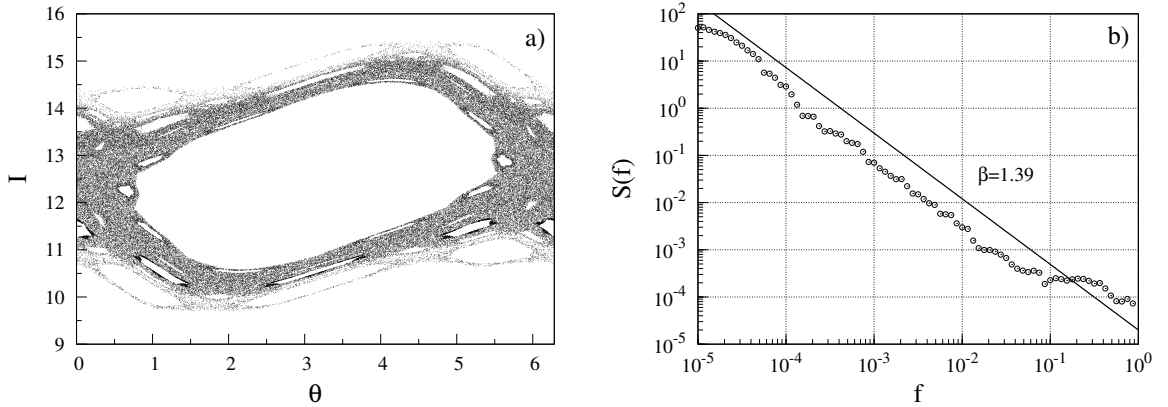
$$\dot{x} = y, \quad (57)$$

$$\dot{y} = -\Gamma y + K f(x) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(z - nT), \quad (58)$$

$$\dot{z} = 1. \quad (59)$$

Suintegravus trimatę diferencialinių lygčių sistemą transformuojama į dvimatį diskretų atvaizdą. Kai nėra trinties ($\Gamma \rightarrow 0$), $T = 1$ ir išorinė jėga yra $f(x_k) = \sin x_k$, gauname standartinį Čirikovo atvaizdą

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + K \sin x_k, \\ x_{k+1} &= x_k + y_{k+1}. \end{aligned} \quad (60)$$



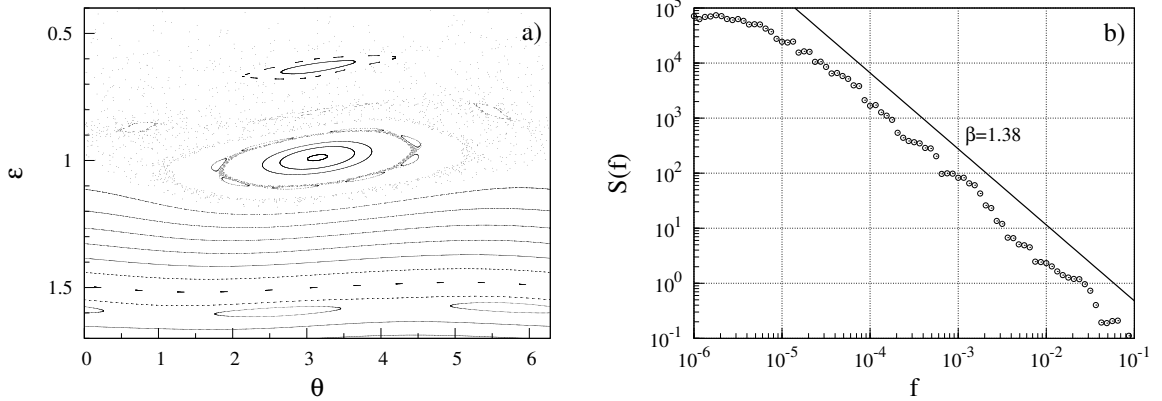
16 pav. a) Rotoriaus judėjimo fazinė erdvė arti krizinio taško $K = 1,03$ ir b) jo periodo fliuktuacijų spektrinis tankis

Standartiniame atvaizde pereinama nuo reguliarios prie chaotinės dinamikos, kai $K = K_c \approx 1$ [13, 14]. Trinties neveikiamo rotoriaus hamiltonianas yra

$$H(x_k, y_k) = \frac{y_k^2}{2} + K \cos(x_k) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (61)$$

Sprendami Hamiltono lygtis ir naudodami (60) atvaizdą, apskaičiuojame rotoriaus periodą T_k po k išorinės jėgos smūgių. Turėdami periodo vertes, analogiškai širdies ritmo skaičiavimams [15, 16], sukonstruojame signalą k erdvėje, o signalo intensyvumą prilyginame periodui T_k . 16 paveiksle pateikta rotoriaus judėjimo fazinė erdvė ir jo periodo fliuktuacijų spektrinis tankis.

Toliau analizuojamas vienmatis klasikinis vandenilio atomas vienspalviame elektromagnetiniame lauke. Vandenilio atomas vienspalviame elektromagnetiniame lauke yra viena iš paprasčiausių sistemų, kurios dinamika, priklausomai nuo santykinio lauko stiprio ir dažnio, gali būti reguliari arba chaotinė [17, 18]. Analizuojant teoriškai judesio atvaizdai yra patogesni už juos atitinkančias diferencialines lygtis. Tyrinėjamas



17 pav. a) (63) ir (66) atvaizdo (ε, ϑ) trajektorijos ir b) jo periodo fliktuacijų spektrinis tankis

redukuotos energijos ir fazės dvimatis atvaizdas. Tiesinės poliarizacijos vienspalviame lauke esantį vandenilio atomą aprašo hamiltonianas

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{P} + \frac{1}{c} \mathbf{A} \right)^2 - \frac{1}{r}. \quad (62)$$

Čia \mathbf{P} – apibendrintas momentas, c – šviesos greitis, \mathbf{A} – vektorinis lauko potencialas, \mathbf{F} – lauko intensyvumas, ω – lauko dažnis, o ϑ žymi lauko fazę. Energijos pokytis \dot{E} randamas iš Hamiltono lygčių. Įvedus redukuotą energiją $\varepsilon = -2E/\omega^{2/3}$ ir redukuotą lauko intensyvumą $F_s = F/\omega^{4/3}$, gautas redukuotos energijos pokytis tarp dviejų apocentūrų

$$\varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j - \pi F_0 \varepsilon_0^2 h(\varepsilon_{j+1}) \sin \vartheta_j, \quad (63)$$

kur

$$h(\varepsilon_{j+1}) = \frac{4}{\varepsilon_{j+1}} \mathbf{J}'_{s_{j+1}}(s_{j+1}), \quad (64)$$

o $\mathbf{J}_s(z)$ žymi Angerio funkciją. Įvedus generuojančiąją funkciją $G(\varepsilon_{j+1}, \vartheta_j)$ ir pareiklavus fazinės erdvės ploto pastovumo

$$\frac{\partial(\varepsilon_{j+1}, \vartheta_{j+1})}{\partial(\varepsilon_j, \vartheta_j)} = 1, \quad (65)$$

gaunama fazės pokyčio per periodą rekurentinė lygtis

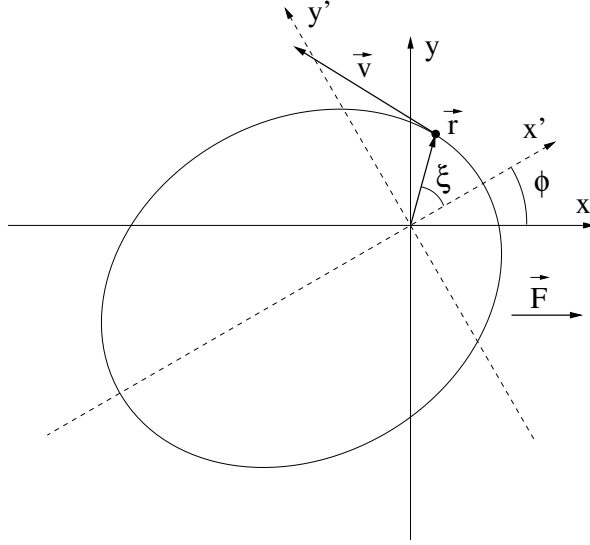
$$\vartheta_{j+1} = \vartheta_j + 2\pi \varepsilon_{j+1}^{-3/2} - \pi F_0 \varepsilon_0^2 \eta(\varepsilon_{j+1}) \cos \vartheta_j, \quad (66)$$

kur

$$\eta(\varepsilon_{j+1}) = \frac{dh(\varepsilon_{j+1})}{d\varepsilon_{j+1}}. \quad (67)$$

Naudojantis (63) ir (66) lygtimis tyrinėjama vandenilio atomo dinamika ir jonizacijos sąlygos. 17 paveiksle pavaizduota vienmačio vandenilio atvaizdas (63), (66) ir periodo fliktuacijų spektrinis tankis.

Neapsiribodami vienmačiu atveju, tyrinėjame ir dvimatį vandenilio atomą vienspalviame elektromagnetiniame lauke, pavaizduotą 18 paveiksle. Dvimačio vandenilio ato-



18 pav. Dvimatis vandenilio atomas elektromagnetiniame lauke

mo hamiltonianas užrašomas taip:

$$\mathcal{H} = \frac{m}{2}\dot{r}^2 + r^2\dot{\xi}^2 - rF \cos(\xi + \varphi) \cos(\omega t + \vartheta) - \frac{1}{r}. \quad (68)$$

Tyrinėjant dvimačio vandenilio dinamiką patogiau yra pereiti prie elipsinių koordinatinių. Šioje koordinatinių sistemoje visos išraiškos gaunamos paprastesnės ir aiškesnės. Analizuojant dvimatį judėjimą tyrinėti vien energijos pokytį nepakanka. Iš Hamiltono lygčių gaunama judesio kiekio momento išraiška

$$\dot{M} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = -rF \sin(\xi + \varphi) \cos(\omega t + \vartheta). \quad (69)$$

Pasinaudojus judėjimo fazinės erdvės pastovumo sąlyga gautos energijos, judesio kiekio momento ir fazės rekurentinės kitimo lygtys, kai judesio pradžia yra trajektorijos apocentre ir pericentre.

Panaudojus asimptotines Angerio funkcijos išraiškas analizuojami atvejai, kai santykinis dažnis yra didelis $s \gg 1$, kai orbitos labai ištemptos (ekscentricitetas $e \approx 1$) ir beveik apskritiminės orbitos ($e \approx 0$). Šiems atvejams išvestos energijos, judesio kiekio momento ir fazės rekurentinės kitimo lygtys. 19 paveiksle pavaizduotos dvimačio vandenilio atomo judesio atvaizdo trajektorijos ir periodo fliktuacijų spektrinis tankis.

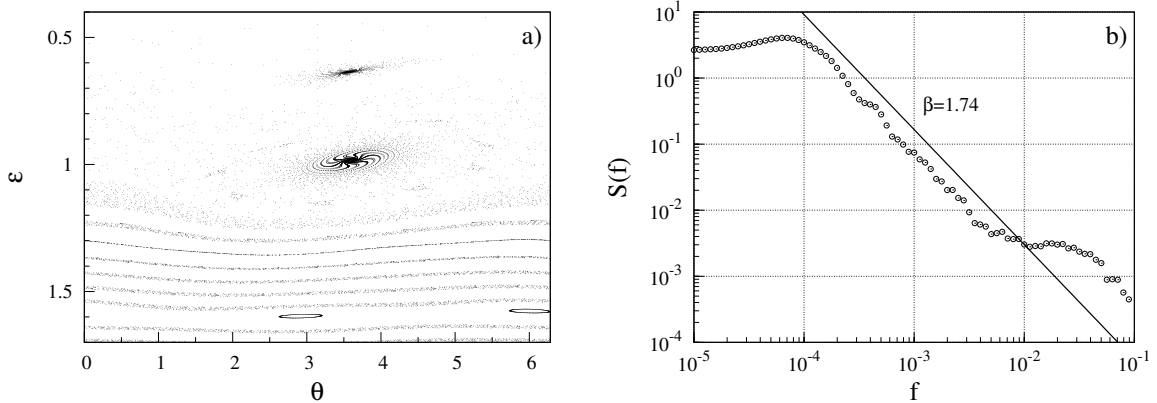
Analizuojamas ir atvejis, kai išorinio elektromagnetinio lauko poliarizacija yra apskritiminė. Energijos kitimą tokiaime lauke aprašo lygtis

$$\dot{E} = -eF (v_x \cos(\omega t + \vartheta) \pm v_y \sin(\omega t + \vartheta)), \quad (70)$$

kur \pm atitinka kairinę ir dešinę poliarizaciją. Gautos tokio lauko veikiamo klasikinio vandenilio energijos ir judesio kiekio momento pokyčių per periodą išraiškos.

Skaitmeninio modeliavimo ir skaičiavimo programos

Šiame skyriuje pristatomi skaitmeninio skaičiavimo metodai, panaudoti modeliuojant įvairius taškinius procesus, signalus ar kitas charakteristikas. Visos programos parašytos C++ programavimo kalba naudojant GNU g++ 3.2.2 versijos kompiliatorių



19 pav. a) Dvimačio vandenilio atomo fazinės erdvės trajektorijos ir b) periodo fluktuacijų spektrinis tankis. Kampas tarp didžiosios elipsės ašies ir išorinio elektromagnetinio lauko vektoriaus $\varphi = \pi/6$

Linux operacinėje sistemoje. Programos parašytos į objektus orientuotu programavimo stiliumi ir gali būti perkeltamos į kitas operacines sistemas ar kompiliuojamos kitais C++ kompiliatoriais. Atsitiktinių skaičių generatorius ir greitoji Furjė transformacija buvo atliekama pasinaudojus GSL bibliotekomis.

Pagrindiniai rezultatai ir išvados

1. Pateiktas paprastas taškinių vyksmų modelis, pasižymintis $1/f^\beta$ triukšmu su įvairiomis eksponentės β vertėmis. Laikai tarp impulsų stochastiškai kinta tam tikrame intervale, nulemdami signalo amplitudės laipsninį pasiskirstymą. Modelis nereikalauja plataus relaksacijos laikų pasiskirstymo ar laipsninės formos impulsų.
2. Ištirtas iš nekoreliuotų dedamųjų susidedančio signalo (McWhorter) modelis ir parodyta, kad signalo, susidedančio iš signalų su laipsniškai pasiskirsčiusiais tiesinės relaksacijos koeficientais γ , sumos spektrinis tankis yra $1/f^\beta$ formos su įvairiais polinkiais β . Išanalizuotas taškinio vyksmo modelio sąryšis su McWhorter modeliu. Taškinio proceso signalas yra multifraktalinis, o McWhorter modelio – monofraktalinis.
3. Parodyta, kad taškinis vyksmas, sudarytas iš Dirako delta funkcijų, panaudojant įvairios formos impulsus, gali būti transformuotas į tolydų signalą ir atgal į taškinį vyksmą, išlaikant pradinį žemų dažnių spektrinį tankį.
4. Ištirtas iš tolygiai plačiame intervale pasiskirsčiusios trukmės vienodo ploto impulsų atsitiktinės sekos sudaryto signalo modelis ir parodyta, kad jis pasižymi $1/f$ spektriniu tankiu plačiame dažnių intervale.
5. Išanalizuotas ryšys tarp iš impulsų sudarytų taškinio vyksmo signalų ir fluktuojančios amplitudės signalų. Parodoma, kad vieno tipo signalai gali būti transformuojami į kito tipo signalus išlaikant žemų dažnių spektrinį tankį.
6. Gautos $1/f^\beta$ triukšmu pasižyminčius signalus generuojančios netiesinės skirtuminės ir diferencialinės lygtys. Šių lygčių sprendinių skirstiniai yra laipsninės funkcijos.

7. Parodyta, kad periodiškai smūgiuojamo rotoriaus periodas perėjimo nuo reguliarių prie chaotinių fazinės erdvės trajektorijų srityje pasižymi $1/f^\beta$ triukšmu.
8. Gali būti stebimos vienmačio ir dvimačio klasikinio vandenilio atomo monochromatiniame elektromagnetiniame lauke stochastinio judėjimo periodo $1/f^\beta$ fliktuacijos.
9. Išvestos elektrono Kulono lauke energijos ir judesio kiekio momento pokyčių per pusę ir visą periodą išraiškos vandenilio atomui sąveikaujant su elektromagnetiniu lauku. Parodyta kad tik elektrono energijos pokytis, judant tarp dviejų gretimų pericentūrų, susijęs su kvaziklasikiniu dipoliniu matriciniu elementu, aprašančiu šuolius tarp sužadintų būsenų.
10. Sukurta, išbandyta ir pritaikyta daugelis kompiuterinių programų, generuojančių įvairius stochastinius taškinis vyksmus ir įvairių pasiskirstymų signalus, skaičiuojančių spektrinius tankius ir analizuojančių įvairių signalų statistiką.

Mokslinių darbų sąrašas

Straipsniai

1. M. Alaburda, V. Gontis, and B. Kaulakys, Interaction and chaotic dynamics of the classical hydrogen atom in an electromagnetic field, *Lithuanian J. Phys.* **40** (4), p. 242–247 (2000).
2. J. Ruseckas, B. Kaulakys, and M. Alaburda, Modelling of $1/f$ noise by sequences of stochastic pulses of different duration, *Lithuanian J. Phys.* **43** (4), p. 223–228 (2003).
3. M. Alaburda and B. Kaulakys, $1/f$ noise in point processes and its modelling by stochastic difference equations, *Lithuanian J. Phys.* **43** (6), p. 415–418 (2003).
4. B. Kaulakys and M. Alaburda, $1/f$ noise as a Brownian motion of interevent time and as a superposition of Lorentzians, In: *Noise and Fluctuations, Proc. 17th Intern. Conf., Aug. 18–22, 2003, Prague*, p. 59–62 (2003).
5. B. Kaulakys, M. Alaburda, V. Gontis, and T. Meškauskas Modeling and estimation of $1/f$ noise of the signals represented by pulses and by fluctuating amplitude, *ibid*, p. 679–682 (2003).
6. V. Gontis, B. Kaulakys, M. Alaburda, and J. Ruseckas, Evolution of complex systems and $1/f$ noise: From physics to financial markets, *Solid State Phenomena* **97-98**, p. 65–70 (2004).
7. B. Kaulakys, V. Gontis, and M. Alaburda, Point process model of $1/f$ noise vs a sum of Lorentzians, *Phys. Rev. E* **71**, 051105 (11 pp.) (2005); cond-mat/0504025.

Konferencijų tezės ir pranešimai

1. M. Alaburda, V. Gontis, B. Kaulakys, Klasikinio vandenilio atomo trikdymas ir chaotinė dinamika elektromagnetiniame lauke, 33-ioji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija, Vilnius, 1999 m. rugsėjo 16–18 d. Tezės, p. 292–293 (1999).

2. M. Alaburda, V. Gontis, and B. Kaulakys, Energy change of the classical hydrogen atom in an electromagnetic field, Europhysics Conference 32nd EGAS, Vilnius, 4–7 July 2000, p. 187–188 (2000).
3. M. Alaburda, B. Kaulakys, 1/f triukšmo, modeliuojamo signalo impulsais ir amplitudės fliktuacijomis, analizė, 34-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija, Vilnius, 2001 m. birželio 14–16 d. Tezės, p. 165 (2001).
4. M. Alaburda, B. Kaulakys, 1/f triukšmas taškiniuose vyksmuose ir jo modeliavimas stochastinėmis skirtuminėmis lygtimis, 35-oji jubiliejinė Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija, Vilnius, 2003 m. birželio 12–14 d. Tezės, p. 236 (2003)
5. V. Gontis, B. Kaulakys, M. Alaburda, Taškinių vyksmų modelis, generuojantis įvairaus polinkio 1/f triukšmą, *ibid*, p. 237 (2003)
6. J. Ruseckas, B. Kaulakys, M. Alaburda, 1/f triukšmo modeliavimas įvairaus ilgio stochastiniais impulsais, *ibid*, p. 240 (2003)
7. B. Kaulakys and M. Alaburda, 1/f noise as a Brownian motion of interevent time and as a superposition of Lorentzians, 17th Intern. Conf. on Noise and Fluctuations, Aug. 18–22, 2003, Prague (2003).
8. B. Kaulakys, M. Alaburda, V. Gontis, and T. Meškauskas, Modeling and estimation of 1/f noise of the signals represented by pulses and by fluctuating amplitude, *ibid* (2003)
9. V. Gontis, B. Kaulakys, M. Alaburda, and J. Ruseckas, Evolution of complex systems and 1/f noise: From physics to financial markets, 6th Intern. Conf. Self-formation Theory and Applications, Vilnius, Nov. 26–28, 2003. Abstracts p. 73–74 (2003).

Literatūra

- [1] S. Thurner, S. B. Lowen, M. C. Feurstain, C. Heneghan, H. G. Feichtinger, and M. C. Teich, *Fractals* **5** (4), 565 (1997).
- [2] B. B. Mandelbrot, *Multifractals and 1/f Noise*, Springer-Verlag (1999).
- [3] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press (2003).
- [4] P. Lévy, *Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, Paris (1925).
- [5] P. Lévy, *Théorie de l'Addition des Variables Aléatoires*, Gauthier-Villars, Paris (1954).
- [6] T. Lukes, *Proc. Phys. Soc.* **78** (2), 153 (1961).
- [7] B. Kaulakys and T. Meškauskas, in *Proc. of the 14th Inter. Conf. on Noise in Physical Systems and 1/f Fluctuations, Leuven, Belgium, 14 - 18 July 1997*, edited by C. Claeys and E. Simoen, World Scientific, Singapore (1997), p. 126.

- [8] E. Bacry, J. Delour, and J. F. Muzy, *Phys. Rev. E* **64**, 026103 (2001).
- [9] J. Bernamont, *Ann. Phys.* **7**, 71 (1937).
- [10] A. L. McWhorter, in *Semiconductor Surface Physics*, edited by R. H. Kingston, Univ. Penn. Press, Philadelphia (1957), p. 207.
- [11] V. Gontis, B. Kaulakys, M. Alaburda, and J. Ruseckas, *Solid State Phen.* **97–98**, 65 (2004).
- [12] V. Gontis and B. Kaulakys, *Physica A* **343**, 505 (2004).
- [13] B. V. Chirikov, *Phys. Rep.* **52** (5), 263 (1979).
- [14] J. M. Greene, *J. Math. Phys.* **20** (6), 1183 (1979).
- [15] C.-K. Peng, J. Mietus, J. M. Hausdorff, S. Havlin, H. E. Stanley, and A. L. Goldberger, *Phys. Rev. Lett.* **70** (9), 1343 (1993).
- [16] P. Ch. Ivanov, L. A. N. Amaral, A. L. Goldberger, S. Havlin, M. G. Rosenblum, H. E. Stanley, and Z. R. Struzik, *Chaos* **11** (3), 641 (2001).
- [17] N. B. Delone, V. P. Krainov, and D. L. Shepelyansky, *Usp. Fiz. Nauk* **140**, 355 (1983).
- [18] P. M. Koch and K. A. H. van Leeuwen, *Phys. Rep.* **255** (5–6), 289 (1995).

POINT PROCESSES MODELING OF $1/f$ NOISE

Doctoral dissertation

Summary

The main objectives aims of the dissertation include: (i) generalizations of the point process model for generation of signals with different slopes β of the power-law spectral density $1/f^\beta$, (ii) the analysis of the relation of the point process with the models representing signals as a sum of appropriate signals with a wide-range distributions of the linear relaxation of signal components, (iii) relation of the point process with the stochastic signals represented by fluctuating intensity, (iv) derivation and analysis of the stochastic nonlinear difference and differential equations generating signals with $1/f^\beta$ noise, (v) modeling and analysis of $1/f^\beta$ noise processes by sequences of stochastic pulses of different durations, and (vi) search of $1/f^\beta$ noise in chaotic Hamiltonian systems such as a classical hydrogen atom in an electromagnetic field, deriving recurrent expressions for the energy and angular momentum changes of the electron.

We present a simple point process model of $1/f^\beta$ noise, covering different values of the exponent β . The signal of the model consists of pulses or events. The inter-pulse, interevent, interarrival, recurrence or waiting times of the signal are described by the general Langevin equation with the multiplicative noise and stochastically diffuse in some interval resulting in the power-law distribution. Our model is free from the requirement of a wide distribution of relaxation times and from the power-law forms of the pulses. It contains only one relaxation rate and yields $1/f^\beta$ spectra in a wide range of frequency. We obtain explicit expressions for the power spectra and present numerical illustrations of the model.

Further we analyse the relation of the point process model of $1/f$ noise with the Bernamont-Surdin-McWhorter model, representing the signals as a sum of the uncorrelated components. We show that the point process model is complementary to the model based on the sum of signals with a wide-range distribution of the relaxation times. In contrast to the Gaussian distribution of the signal intensity of the sum of the uncorrelated components, the point process exhibits asymptotically a power-law distribution of the signal intensity. The developed multiplicative point process model of $1/f^\beta$ noise may be used for modeling and analysis of stochastic processes in different systems with the power-law distribution of the intensity of pulsing signals.

Generation and analysis of $1/f$ noise as consisting of pulses (point process) and represented by fluctuating amplitude of the signal are presented as well. It is shown how one type of a signal can be transformed into the other type with the same low frequency power spectral density. The autoregressive equations for the interevent time of the point process may be transformed to the difference equations for the signal and to the nonlinear Itô stochastic differential equations for the rate of the signal, resulting in the $1/f$ noise process. On the other hand, every signal may be transformed into the point-like process by the integrate-and-fire method for the generation of the occurrence times of the pulses.

Further we investigate the other model where the currents or signals are represented as sequences of the random pulses, for which recurrence time intervals between transit times of pulses are uncorrelated with the shape of the pulse. It is shown that for the

pulses of a fixed area with random duration, distributed uniformly in a wide interval, $1/f$ behavior of the power spectrum of the signal or current in a wide range of frequency may be obtained.

Expressions for energy and angular momentum changes of the hydrogen atom due to the interaction with the electromagnetic field during the period of the electron motion in the Coulomb field are derived. We show that the period of motion of a rotor without a friction, affected by the periodic strikes and one-dimensional classical hydrogen atom in a linearly polarized monochromatic electromagnetic field and two-dimensional atom in monochromatic field exhibit stochastic motion and can result in $1/f^\beta$ noise.

During the research time various programs, generating different stochastic point processes and signals of various distributions, calculating power spectral densities of different processes and analysing statistics of the signals were written, tested and applied.

Trumpos žinios apie doktorantą

Vardas: Miglius

Pavardė: Alaburda

Gimimo data: 1975 09 24

El. paštas: miglius@itpa.lt

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

- 1993 – 1997** Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Bakalauro kvalifikacinis laipsnis.
- 1997 – 1999** Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Magistro kvalifikacinis laipsnis.
- 1999 – 2004** Doktorantūra Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute.

Miglius Alaburda

TAŠKINIŲ PROCESŲ $1/f$ TRIUKŠMO MODELIAVIMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, fizika (02 P), matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika (190 P)

Tiražas 70 egz. Užsakymo Nr. 1556

Spausdino UAB „Mokslo aidai“

A. Goštauto g. 12, 01108 Vilnius