

VILNIAUS UNIVERSITETAS
FIZINIŲ IR TECHNOLOGIJOS MOKSLŲ CENTRAS

ALEKSEJUS KONONVIČIUS

FINANSŲ RINKŲ IR SOCIALINIŲ PROCESŲ
MODELIAVIMAS STATISTINĖS FIZIKOS METODAIS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, fizika (02 P)

Vilnius, 2015

Disertacija rengta 2011–2015 m. Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.

Mokslinis vadovas:

dr. Vygintas Gontis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P)

Disertacija bus ginama Vilniaus universiteto Fizikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

habil. dr. Evaldas Tornau (Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai mokslai, fizika – 02 P)

Nariai:

prof. dr. Egidijus Anisimovas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P),

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Pyragas (Fizinių ir technologijos mokslų centras, fiziniai mokslai, fizika – 02 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Staliūnas (Katalonijos politechnikos universitetas (Ispanija), fiziniai mokslai, fizika – 02 P)

Disertacija bus ginama viešame Vilniaus universiteto Fizikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2015 m. gruodžio 18 d. 14 val. VU Konfucijaus instituto salėje (A. Goštauto g. 12–432 k., Vilnius).

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2015 m. lapkričio ____ d.

Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto bibliotekoje, Fizinių ir technologijos mokslų centro bibliotekoje ir VU interneto svetainėje adresu: <http://www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius>.

VILNIUS UNIVERSITY
CENTER FOR PHYSICAL SCIENCES AND TECHNOLOGY

ALEKSEJUS KONONVIČIUS

APPLICATIONS OF STATISTICAL PHYSICS IN MODELING
OF FINANCIAL MARKETS AND SOCIAL PROCESSES

Summary of Doctoral Dissertation
Physical Sciences, Physics (02P)

Vilnius, 2015

The research was performed in 2011–2015 at Vilnius university, Institute of Theoretical Physics and Astronomy

Scientific supervisor:

dr. Vygintas Gontis (Vilnius University, physical sciences, physics – 02 P)

Dissertation will be defended at Vilnius University Dissertation Defence Board in Physics:

Chairman:

habil. dr. Evaldas Tornau (Center for Physical Sciences and Technology, physical sciences, physics – 02 P)

Members:

prof. dr. Egidijus Anisimovas (Vilnius University, physical sciences, physics – 02 P),

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilnius University, physical sciences, mathematics – 01 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Pyragas (Center for Physical Sciences and Technology, physical sciences, physics – 02 P),

prof. habil. dr. Kęstutis Staliūnas (Universitat Politecnica de Catalunya (Spain), physical sciences, physics – 02 P)

Doctoral Dissertation will be defended at the public meeting of the Vilnius University Dissertation Defence Board in Physics, which will be held at VU Confucius Institute hall (A. Goštauto st. 12-432, Vilnius) on December 18, 2015, 14:00.

Summary of Doctoral Dissertation was sent out on November _____, 2015.

Dissertation is available at libraries of Vilnius University and Center for Physical Sciences and Technology, as well as on Vilnius University website: <http://www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius>.

Turinys

1 Įvadas.....	7
1.1 Metodai	10
1.2 Disertacijos tikslas	10
1.3 Disertacijos uždaviniai	10
1.4 Ginamieji teiginiai	11
1.5 Darbo naujumas	11
2 Disertacijos struktūra ir turinys.....	13
2.1 Įvadas	13
2.2 Apibendrinta stochastinių lygčių klasė	13
2.2.1 Skaitmeninis stochastinių lygčių sprendimas	13
2.2.2 Laipsninė stacionaraus tikimybės tankio funkcija	14
2.2.3 Laipsninis spektrinis tankis	14
2.2.4 Dvigubas stochastinis absoliučios gražos modelis	15
2.3 Laipsninis burbulų statistikos pobūdis	16
2.3.1 Burbulų statistikos apibrėžimas	16
2.3.2 Empirinės ir modelinės burbulų statistikos gavimas	17
2.3.3 Analizinis burbulų trukmių pasiskirstymo gavimas.....	17
2.3.4 Laipsninės priklausomybės tarp dydžių, nusakančių burbulų geometriją..	19
2.4 Netiesinis GARCH(1,1) kintamumo procesas, pasižymintis laipsninėmis statis- tinėmis savybėmis	19
2.4.1 Tiesinis GARCH	20
2.4.2 Netiesinės GARCH(1,1) kintamumo proceso modifikacijos	21
2.5 Dviejų būsenų sistemos modeliavimas bandos jausmo sąveika.....	24
2.5.1 Kirmano bandos jausmo agentų modelis.....	24
2.5.2 Makroskopinė Kirmano modelio interpretacija	25
2.5.3 Sąveikų topologijos svarba	27
2.6 Finansų rinkų agentų modeliai	29
2.6.1 Finansų rinkų interpretacija	29
2.6.2 Stochastinis moduluojančios gražos modelis	31
2.6.3 Skirtingi absoliučios gražos proceso laiko masteliai	31
2.6.4 Išorinio triukšmo įtraukimas	33
2.6.5 Dienos sezoniškumo įtraukimas	34
2.7 Finansinių svyravimų valdymas naudojantis bandos jausmo sąveikomis	38
2.7.1 Dviejų būsenų modelio valdymas	38

2.7.2	Trijų būsenų modelio valdymas	39
3	Išvados	40
	Literatūra	41
	Summary	48
	Trumpos žinios apie disertacijos autorių	50
	Disertacijos autoriaus mokslinių darbų sąrašas	52
	Padėka.....	59

1 Įvadas

Stichiniai reiškiniai finansų rinkose nėra reti – dideli kainų svyravimai neretai kyla be aiškios priežasties [1–3]. Stichiniai reiškiniai yra būdingi ir kitoms socialinėms sistemoms – knygų, filmų, įvairių prekės ženklų populiarumas dažnai viršija objektyvius lūkesčius [4]. Panašūs reiškiniai stebimi ir tiriant gyvūnų elgseną [5–8]. Šie reiškiniai yra siejami su socialinio spaudimo (angl. *peer pressure*), arba bendriau – bandos jausmo (angl. *herding behavior*), sąvokomis [9]. Bandos jausmas leidžia socialiniams institutams susiformuoti, bet kartu kelia nemažą pavojų – ekonomines ir socialines rizikas.

Bandos jausmo sąvoka yra būdingesnė socialinių mokslų tyrimų sferai, todėl bandos jausmo ryšys su statistine fizika neatrodo akivaizdus. Kad ryšys yra būtų galima įsitikinti pažvelgus į statistinės fizikos istoriją, kuri prasideda XIX a. Maksvelo (James Clerk Maxwell) ir Bolcmano (Ludwig Boltzmann) darbais [10]. Iki šių darbų termodinamikos dėsniai buvo gerai žinomi iš eksperimentų, bet teorinis rezultatų paaiškinimas buvo aktuali problema. Šios problemos sprendimo raktas buvo paprasta idėja, kad atskirų dalelių trajektorijos nėra svarbios, o svarbus yra tik šių trajektorijų statistinis aprašymas. Manoma, kad šią idėją, kuri mūsų laikais žinoma kaip molekulinis chaosas (angl. *molecular chaos*), įkvėpė to paties laikotarpio socialinių mokslų darbai, kuriuose buvo analizuojami demografiniai duomenys [10].

XX a. pradžioje Einšteinas (Albert Einstein) ir Smoluchovskis (Marian Smoluchowski) nepriklausomai vienas nuo kito parodė, kad atomai nėra tik abstrakti koncepcija. Jie teigė, kad padrikas atomų svyravimas gali būti Brauno judėjimo priežastis [11, 12]. Ankstesnį, publikuotą 1900 metais, ir bendresnį Brauno judėjimo paaiškinimą būtų galima rasti prancūzų matematiko Bašeljė (Louis Bachelier) disertacijoje [13]. Bašeljė nagrinėjo visiškai atsitiktinį kainos svyravimą ir parodė, kad tokiu atveju stacionarus kainų skirstinys yra normalusis skirstinys.

XX a. trečiajame dešimtmetyje vokiečių fizikas Izingas (Ernst Ising) pasiūlo elementarų magnetizmo modelį [14]. Šis modelis, esant kritinei temperatūrai, atkurdavo įdomius struktūrinius svyravimus. Remiantis Izingo modeliu, fizikoje atsiranda struktūrų formavimosi (angl. *pattern formation*) sąvoka. 1951 metais britų hidrologas Hurstas (Harold E. Hurst) publikuoja savo viso gyvenimo tyrimą – pastebėjimus apie ilgalaikę atmintį upių potvyniuose ir matematinę metodologiją, šiais laikais vadinama R/S analize, ilgalaikę atminčiai aptikti bei tirti [15]. Dar vieną labai svarbų modelį XX a. šeštame–septintame dešimtmetyje pasiūlė amerikiečių matematikas Lorencas (Edward Lorenz) [16]. Jo užrašytos lygtys, skirtos orams prognozuoti, pasižymėjo dviem įdomiomis savybėmis: viena jų, žinoma, yra struktūrų formavimasis, o kita – lygčių netiesiškumas. Lygčių netiesiškumas paskatino dinaminio chaoso problematikos, taip pat supratimo, kad netiesinėse sistemose maži trikdžiai gali sukelti katastrofiškus padarinius, at-

siradimą. Šis supratimas yra ypač svarbus socialinių sistemų kontekste, nes tai gali būti tiesiogiai susiję su šių sistemų sisteminė rizika. Toliau plėtojantis Lorencio idėjoms, susikūrė sinergetikos mokslas, sudėtingumo teorija, pradėta domėtis atviromis bei nepusiausviromis sistemomis.

Socialiniai mokslai, tarp jų ir ekonomika, tuo metu vystėsi kita linkme – idėjos buvo kuriamos remiantis žmogiškosios prigimties suvokimu. Buvo bandoma suprasti, kaip ir kodėl žmonės priima vienokius ar kitokius sprendimus. Bet žmogiškoji prigimtis yra sudėtinga, todėl, norint sukurti paprastus matematinius modelius, ją reikėjo gerokai supaprastinti.

Vienas pagrindinių socialinių ir ekonominių sistemų supaprastinimų yra ekonominio žmogaus (lot. *homo economicus*) sąvokos įvedimas. Pagal apibrėžimą, ekonominis žmogus yra tobulai racionalus, gerai informuotas ir savanaudis [17]. Idealizuotų prielaidų yra ir fizikoje, tačiau šios konkrečios prielaidos realybę atitinka labai ribotai. Visų pirma, tobulas individualus racionalumas nelemia kolektyvinio racionalumo [18]. Taip pat individualus racionalumas ne visada padeda tinkamai įveikti net elementarias problemas, pvz., „El Farol“ baro problemą [19]. Ekonominis žmogus yra kritikuojamas daug ir įvairiai, vienas pirmųjų kritikuojančių veikalų buvo išleistas 1939 metais (žr. naujesnį amerikiečių švietėjo Druckerio (Peter Drucker) knygos leidimą [20]), bet ši sąvoka tebėra vyraujančių ekonomikos teorijų pagrindas [21–24].

Tobulo racionalumo prielaida nėra iš esmės klaidinga. Yra gerų pavyzdžių, kai tokia prielaida padeda supaprastinti matematinę logiką, slypinčią už, pvz., lošimų teorijos (angl. *game theory*) modelių [25]. Ši prielaida taip pat taikoma verslo vadyboje [26]. Pagrindinė problema yra ta, kad ekonomistai ekonominio žmogaus sąvoką naudoja modeliuojamos sistemos, sudarytos iš daugelio sąveikaujančių „dalelių“ (įmonių, žmonių, agentų), supaprastinimui – daugelio dalelių sistemos uždavinį suveddami į vienos dalelės (reprezentatyvaus agento) uždavinį. Reprezentatyvus agentas, žinoma, taip pat laikomas racionali.

Rinkų efektyvumas yra dar viena idėja, kuria vadovaujasi vyraujančios ekonomikos teorijos [1–3]. Ši idėja remiasi prielaida, kad racionalūs prekeiviai nustatys tokią rinkos kainą, kuri atspindės produkto vertę. Jeigu kuris nors prekeivis gaus daugiau informacijos, tai jis iš karto pasinaudos šiuo pranašumu pelnui gauti. Reaguodama į šio prekeivio veiksmus rinka kainą pakels arba nuleis iki tokios, kuriai esant prekeivis nebegalės daugiau pasipelninti. Ši idėja atrodo abejotina dažnai kylančių vietinių ir globalių krizių kontekste, nes efektyviose rinkose jos neturėtų kilti arba turėtų kilti ypač gerai [1–3, 21–23, 27–32].

Vyraujančios ekonomikos teorijos į didelius ekonominius svyravimus žiūri kaip įriktus (angl. *outlier*), nereikšmingus nukrypimus nuo normaliojo skirstinio. Racionalūs agentai, veikiantys efektyviose rinkose, turėtų sekti išorinius informacijos srautus. Kadangi išorinis informacijos srautas yra sudarytas iš atsitiktinių įvykių, tai dėl centrinės ribinės teoremos išorinės informacijos poveikį būtų galima įsivaizduoti kaip normalųjį skirstinį. Iš tiesų normalusis skirs-

tinys tinkamai aprašo didesnę dalį empirinės statistikos, bet labai nuvertina didelius svyravimus. Pastarąsias tinkamai aproksimuoja laipsninis skirstinys,

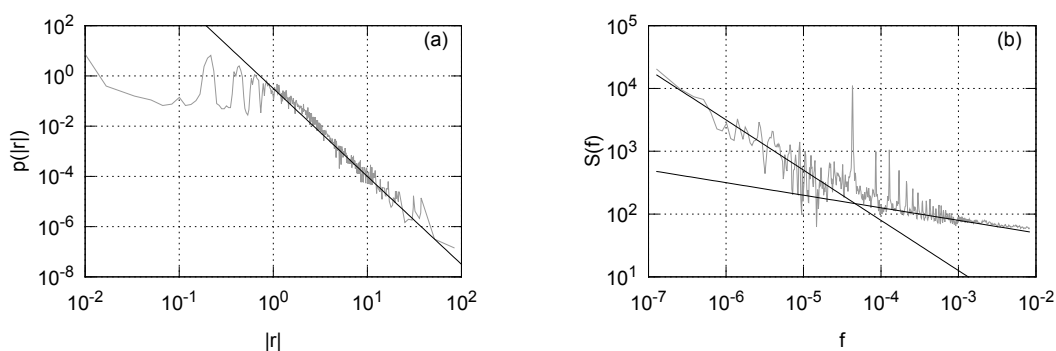
$$p(x) \sim x^{-\lambda}. \quad (1)$$

Veikiausiai pirmą kartą laipsninį skirstinį empiriniuose duomenyse aptiko italų inžinierius (pagal išsilavinimą) ir ekonomistas Paretas (Vilfredo Pareto) XIX a. pabaigoje [33]. Savo darbe Paretas parodė, kad stabilioje ekonomikoje turto pasiskirstymas yra laipsninės formos. Paplitęs įsitikinimas, kad būtent dėl šio darbo atsirado 80-20 taisyklė (80 % rezultato atneša 20 % pastangų), tačiau iš tiesų ją, remdamasis Pareto darbų idėjomis, suformulavo rumunas Juranas (Joseph Juran) [34].

Laipsniniai skirstiniai buvo ilgai pamiršti iki Levy (Paul Levy) [35], Stanley (Eugene Stanley) [36], Mandelbroto (Benoit Mandelbrot) [37] ir Bako (Per Bak) [38] darbų. Šie darbai parodė, kad neintuityvi bemastelė laipsninio pobūdžio dinamika gali būti būdinga atviroms ir nepusiausviroms sistemoms ar tiesiog sistemose, kurios yra kritinėje būsenoje. Šiuo metu fizikai, matematikai ir kai kurie ekonomistai sutaria, kad laipsninės statistinės savybės (skirstiniai, koreliacijos, spektrinis tankis ir kt.) yra būdingos daugeliui socialinių ir ekonominių sistemų [39–48]. Šioje disertacijoje daugiausia dėmesio yra skiriama absoliučios grąžos,

$$r_T(t) = \ln P(t) - \ln P(t - T), \quad (2)$$

statistinėms savybėms (čia $P(t)$ yra kaina). Tipinės vienos minutės, $T = 60s$, absoliučios grąžos statistinės savybės parodytos 1 paveiksle.



1 pav. Vienos minutės absoliučios grąžos (a) tikimybės tankio funkcija ir (b) spektrinis tankis (pilkos kreivės). Juodos kreivės atitinka laipsnines funkcijas: (a) $p(|r|) \sim |r|^{-3.6}$, (b) $S(f) \sim f^{-0.8}$ ir $S(f) \sim f^{-0.2}$

Laipsninių statistinių savybių paplitimas puikiai iliustruoja tai, kad įprasti rizikos valdymo įrankiai bei modeliai nuvertina didelių svyravimų tikimybę. 2007–2008 metų finansų krizė, nors nebūtina apsiriboti jos pavyzdžiu, dažnai yra matoma kaip puikus tokio nuvertinimo

padarinių pavyzdys [21–23]. Norint patobulinti ar sukurti geresnius rizikos valdymo įrankius, būtina reikia atsižvelgti į įvairialypę (angl. *heterogeneous*) socialaus elgesio prigimtį. Reikia suvokti, kad realių žmonių elgesys yra sudėtingas, o kolektyvinis elgesys pasižymi netiesiškumu ir savi-organizacija. Tačiau nereikia pamiršti ir pamatinės statistinės fizikos idėjos: individualūs ypatumai nėra tokie svarbūs kaip bendras statistinis individų tarpusavio sąveikų aprašymas.

1.1 Metodai

Disertacijoje naudojamos statistinei fizikai įprastos idėjos ir įrankiai, taip pat keletas naujų metodų, sukurtų specialiai socialinėms ir ekonominėms sistemoms modeliuoti. Vienas šių naujų metodų yra modeliavimas pasitelkus agentus (angl. *agent-based modeling*), kuris remiasi idėja, kad realiai sąveikaujančias sistemos dalis (žmones, įmones ar kt.) galima pakeisti apibendrintais objektais, agentais, kurie elgiasi pagal labai bendras ir paprastas taisykles. Tinklų teorija (angl. *network theory*) savo esme panaši į grafų teoriją, bet ji aprašo socialinių tinklų susidarymą ir kitimą. Šie įrankiai ir jiems įprastos sąvokos buvo naudojami rašant disertaciją.

1.2 Disertacijos tikslas

Disertacijos tikslas – sukurti finansų rinkų ir socialinių procesų modelius taikant idėjas ir įrankius, įprastus statistinei fizikai, ekonofizikai ir alternatyvioms ekonomikos teorijoms.

1.3 Disertacijos uždaviniai

1. Išanalizuoti burbulų statistiką, stebimą empirinėse absoliučios grąžos laiko eilutėse ir laiko eilutėse, gautose iš stochastinių modelių.
2. Nustatyti ryšį tarp stochastinės lygties, aprašančios procesus, pasižyminčius laipsniniu skirstiniu ir laipsniniu spektriniu tankiu, ir modelių iš kitų formalizmų, tokių kaip modeliavimas pasitelkus agentus, tinklų teorija ir ARCH modeliavimas.
3. Pasiūlyti minimalistinį finansų rinkų agentų modelį, kurio generuojamos laiko eilutės pasižymėtų laipsniniu skirstiniu ir laipsniniu spektriniu tankiu, kurie yra būdingi apibendrintai stochastinių lygčių klasei.
4. Pasiūlyti finansų rinkų modelį, kurio generuojamos absoliučios grąžos laiko eilutės pasižymėtų skirstiniu ir spektriniu tankiu, kurie yra būdingi finansų rinkoms.
5. Išanalizuoti ekstremalių įvykių prevencijos galimybes, kylančias iš siūlomų modelių.

1.4 Ginamieji teiginiai

1. Nagrinėtos modelinės ir empirinės absoliučios gražos laiko eilutės pasižymi statistiškai panašiu laipsniniu burbulų trukmės skirstiniu ir statistiškai panašia laipsnine burbulų geometrija.
2. Netiesinės GARCH(1,1) modelio modifikacijos generuoja kintamumo laiko eilutes, pasižyminčias laipsninėmis statistinėmis savybėmis, taip pat $1/f$ triukšmu.
3. Tolygus perėjimas nuo neekstensyvios prie ekstensyvios statistikos vyksta keičiant sistemos sąveikų pobūdį – pereinant nuo globalių prie lokalių sąveikų.
4. Iš bandos jausmo modelio išvesta stochastinė lygtis, aprašanti ilgalaikį gražos kitimą, priklauso apibendrintai stochastinių lygčių klasei, aprašančiai procesus, kuriems būdingos laipsninės statistinės savybės.
5. Trijų būsenų dinamikos finansų rinkose aprašymas bandos jausmo modeliu leidžia generuoti absoliučios gražos laiko eilutes, pasižyminčias spektriniu tankiu su dviem charakteringais laipsnio rodikliais.
6. Empirinis absoliučios gražos skirstinys ir spektrinis tankis atkuriamas jungtiniu modeliu, įskaitančiu trijų būsenų dinamiką ir išorinio triukšmo poveikį.
7. Valdomi agentai, sąveikaujantys globaliai, leidžia sumažinti ekstremalių įvykių tikimybę. Šis efektas išlieka ir trijų būsenų modelyje, kai valdomi agentai prekiauja atsitiktinai.

1.5 Darbo naujumas

Agentų modeliai yra svarbūs aprašant socialines ir ekonomines sistemas, nes padeda suprasti, kokios universalios individualaus elgesio ypatybės gali atkurti empirines stilizuotas statistines savybes (angl. *stylized fact*) [49–51]. Agentų modeliai puikiai paaiškina vyksmus individualiame, mikroskopiniame, lygmenyje, tačiau dažnai šie modeliai tampa per daug sudėtingi, kai bandoma tiksliai atkurti empirinių duomenų statistines savybes [51]. Stochastiniai modeliai šiuo požiūriu yra pranašesni, nes leidžia lengviau atkurti laiko eilutes, pasižyminčias statistinėmis savybėmis, panašiomis į empirines. Tačiau šie modeliai yra nepakankami norint paaiškinti modeliuojamus vyksmus. Dėl to pastarojo meto moksliniuose darbuose buvo raginimų sieti šiuos du modeliavimo metodus [22] ir keletas bandymų tai įgyvendinti [52–54].

Šiame kontekste disertacijoje pristatomi tyrimai išsiskiria tuo, kad, remdamiesi ankstesniais kitų grupių autorių darbais [55–59], mes siūlome agentų modelius ir iš jų išvedame stochastinius modelius, suderinamus su ankstesniais mūsų grupės pasiūlytais stochastiniais modeliais [60–64]. Disertacijoje pasiūlyti finansų rinkų modeliai yra išskirtiniai tuo, kad jų generuojamos laiko eilutės pasižymi tiek stilizuotomis statistinėmis savybėmis (pvz., laipsniniai skirstiniai, ilgalaikė atmintis), tiek empiriškai stebimomis absoliučios grąžos statistinėmis savybėmis.

Disertacijoje, remiantis pasiūlytais agentų modeliais, aptariama ekstremalių įvykių finansų rinkose ir kitose socialinėse sistemose prevencijos galimybė. Iki šiol ši tema buvo plėtojama tik nagrinėjant labai paprastus modelius [65, 66] arba atliekant sudėtingus eksperimentus [8, 67]. Mes esame pirmieji, nagrinėjantys ekstremalių įvykių prevencijos galimybes finansų rinkų modeliuose, kurie atkuria empirines absoliučios grąžos statistines savybes.

2 Disertacijos struktūra ir turinys

Šiame santraukos skyriuje glaustai pristatomas atskirų disertacijos skyrių turinys. Šiame skyriuje atskiros disertacijos struktūrinės dalys yra numeruojamos ta pačia tvarka kaip numeruojami skyriai disertacijoje – t.y. 2.4 skyrelis atitinka 4 disertacijų skyrių, o 2.6 skyrelis – 6 skyrių. Disertacijos skyrių apibendrinimai, esantys kiekvieno disertacijos skyriaus pabaigoje, šioje santraukoje nėra atskirai aptariami. Disertaciją taip pat sudaro vartojamų santrumpų sąrašas, išvados, literatūros sąrašas ir disertacijos autoriaus publikacijų sąrašas. Disertacijos išvados yra pateiktos 3 santraukos skyriuje.

2.1 Įvadas

Pirmame disertacijos skyriuje aptariamas istorinis tyrimų kontekstas ir aktualūs metodai, suformuluojamas disertacijos tikslas, uždaviniai ir ginamieji teiginiai, aptariama disertacijos struktūra.

2.2 Apibendrinta stochastinių lygčių klasė

Antrame disertacijos skyriuje pristatomi darbai, susiję su apibendrinta stochastinių lygčių klase, aprašančia stochastinius procesus, pasižyminčius laipsniniu skirstiniu ir laipsniniu spektriniu tankiu, taip pat aptariami skaitmeniniai algoritmai, skirti tokio tipo lygtims spręsti.

Apibendrinta stochastinių lygčių klasė buvo išvesta iš taškinių procesų Kaulakio, Rusecko, Gončio ir Alaburdos darbuose (pvz., [60–64]). Jos bendra forma, Ito prasme, yra tokio pavidalo:

$$dx = \sigma^2 \left(\eta - \frac{\lambda}{2} \right) x^{2\eta-1} dt + \sigma x^\eta dW, \quad (3)$$

čia σ nustato proceso laiko mastelį, η yra triukšmo multiplikatyvumo (netiesiškumo) laipsnio rodiklis, λ nustato x tikimybės tankio funkcijos laipsnio rodiklį (dideliems x), o W yra Vynerio (Wiener) procesas (standartinis vienmatis Brauno judėjimas).

2.2.1 Skaitmeninis stochastinių lygčių sprendimas

Disertacijos 2.1 skyriuje apžvelgiami skaitmeniniai metodai, taikomi sprendžiant stochastines lygtis. Pradedama nuo vadovėliams [68, 69] įprastų Eulerio–Marujamos ir Milšteino

metodų, kurie leidžia stochastines lygtis perrašyti kaip skirtumines. Taip pat aptariamas kintamo žingsnio metodas, kuris leidžia pasiekti didesnę tikslumą labiau nedidinant skaičiavimo sąnaudų.

Eulerio–Marujamos ir Milšteino metodai

Disertacijos 2.1.1 skyriuje aptariami Eulerio–Marujamos ir Milšteino metodai, užrašomos atitinkamos išraiškos ir aptariami metodų pranašumai.

Kintamo žingsnio metodas

Disertacijos 2.1.2 skyriuje pristatomas kintamo žingsnio metodas ir aptariami jo pranašumai palyginti su Eulerio–Marujamos ir Milšteino metodais.

2.2.2 Laipsninė stacionaraus tikimybės tankio funkcija

Disertacijos 2.2 skyriuje, taikant bendrus vadovėlinius metodus, remiantis [69–71], parodoma, kad laiko eilutės, gaunamos sprendžiant (3) lygtį, pasižymi laipsniniu stacionariu tikimybės tankiu:

$$p_{st}(x) = C x^{-\lambda}. \quad (4)$$

Bendru atveju normavimo konstantos, C , išraiškos nustatyti nepavyksta, nes normavimo integralas diverguoja. Skaitmeniniuose skaičiavimuose ši problema pasireiškia kaip x verčių polinkis „užstrigti“ ties 0. Problemiška atrodo ir didelių verčių sritis, nes dėl šios srities diverguos visi momentai, kurių eilė $n > \lambda - 1$. Taigi dažnai reikia įvesti tam tikrus ribojimus tiek iš mažų, tiek iš didelių verčių pusės.

Šioje disertacijos dalyje aptariami trys būdai spręsti divergavimo problemas – įvesti atspindinčias ribas, eksponentinius difuzijos apribojimus arba „nulinius“ svyravimus.

2.2.3 Laipsninis spektrinis tankis

Disertacijos 2.3 skyriuje trumpai aptariamas [72] darbo, kuriame iš kintamųjų mastelio kitimo (angl. *scaling*) savybių parodoma, kad laiko eilučių, gaunamų sprendžiant (3) lygtį, spektrinis tankis yra laipsninio pobūdžio, turinys:

$$S(f) \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\lambda - 3}{2\eta - 2}. \quad (5)$$

Dažnių srities, kuriai būdinga laipsninė asimptotika, plotį nulemia santykinis atstumas tarp naudojamų difuzijos apribojimų, o padėtį – laiko mastelio, σ , parametras.

Šioje disertacijos dalyje skaitmeniniais skaičiavimais parodoma, kad analizinės formulės galioja esant skirtingiems (aptartiems disertacijos 2.2 skyriuje) difuzijos apribojimo mechanizams.

2.2.4 Dvigubas stochastinis absoliučios grąžos modelis

Disertacijos 2.4 skyriuje aptariamas dvigubas stochastinis modelis, skirtas absoliučiai grąžai finansų rinkose modeliuoti.

Laiko eilutės, gaunamos sprendžiant (3) lygtį, pasižymi spektriniu tankiu su viena laipsninio pobūdžio sritimi. Empirinis absoliučios grąžos spektrinis tankis yra kitoks, „perlūžęs“, – jame yra dvi laipsninio pobūdžio sritys su skirtingais laipsnio rodikliais β_1 ir β_2 . Sąryšis tarp spektrinio tankio laipsnio rodiklio β ir lygties parametru, (5) išraiška, leidžia daryti prielaidą, kad stochastinė lygtis su dviem skirtingais triukšmo multiplikatyvumo laipsniais leistų atkurti „perlūžusį“ spektrinį tankį.

Šiek tiek pakeitus (3) lygties pavidalą:

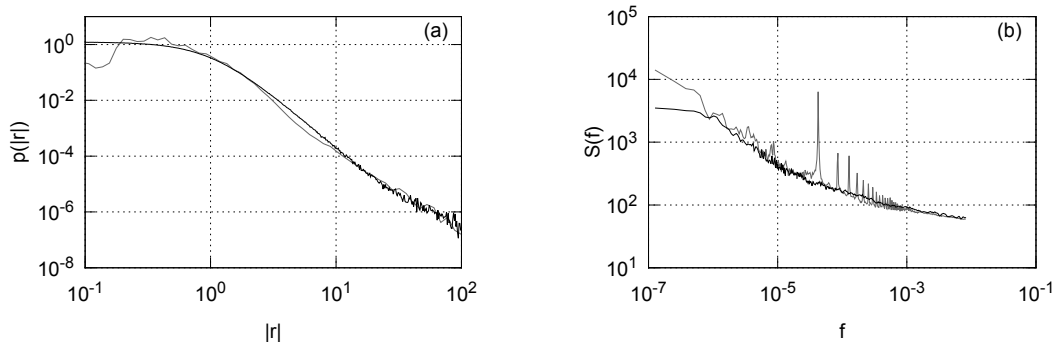
$$dx = \sigma^2 \left[\eta - \frac{\lambda}{2} - \left(\frac{x}{x_{max}} \right)^2 \right] \frac{(1+x^2)^{\eta-1}}{(\epsilon \sqrt{1+x^2} + 1)^2} x dt + \sigma \frac{(1+x^2)^{\frac{\eta}{2}}}{\epsilon \sqrt{1+x^2} + 1} dW_s, \quad (6)$$

pavyksta gauti x laiko eilutes, pasižyminčias „perlūžusiu“ spektriniu tankiu. Šioje lygtyje papildomai įvestas parametras ϵ , kuris nusako stochastinio kintamojo x difuzijos srities padalinimo į dvi dalis vietą – vienoje srityje triukšmo multiplikatyvumo laipsnis yra η , o kitoje – $\eta - 1$. Tačiau skaitmeniškai gaunamų x laiko eilučių spektrinių tankių β_i vertės yra gerokai didesnės nei empirinės.

Tikslią empirinio absoliučios grąžos spektrinio tankio formą pavyksta atkurti atsižvelgus į greitus finansinius svyravimus – modelį papildžius išoriniu q -Gauso triukšmu:

$$r_T(t) = |\zeta_q\{r_0(t, T), \lambda_2\}|, \quad r_0(t, T) = 1 + \frac{\bar{r}_0}{\sigma_t^2 T} \int_{\sigma^2 t}^{\sigma_t^2(t+T)} x(k) dk, \quad (7)$$

čia $r_T(t)$ yra absoliuti T periodo grąža laiko momentu t , $\zeta_q(\cdot)$ yra funkcija, generuojanti q -Gauso atsitiktinius dydžius, r_0 yra parametras, savo prasme artimas skirstinio standartiniam nuokrypiui, o λ_2 nusako q -Gauso skirstinio laipsnio rodiklį. 2 pav. parodomas statistinių savybių, tikimybės tankio funkcijų ir spektrinio tankio funkcijų sutapimas lyginant empirinius duomenis (Niujorko birža, 26 akcijos) ir modelio laiko eilutes.



2 pav. Modelio (juodos kreivės) ir empirinių (pilkos kreivės) absoliučios grąžos vienos minutės grąžos laiko eilučių tikimybės tankio funkcijų (a) ir spektrinių tankio funkcijų (b) palyginimas. Empirinės statistinės savybės šiam palyginimui gautos vidurkinant per 26 Niujorko vertybinių popierių biržos akcijas. Naudoti modelio parametrai: $\sigma^2 = 1/6 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, $\eta = 2.5$, $\lambda = 3.6$, $\epsilon = 0.017$, $x_{max} = 10^3$, $\tau = 60 \text{ s}$, $\bar{r}_0 = 0.4$, $\lambda_2 = 5$

2.3 Laipsninis burbulų statistikos pobūdis

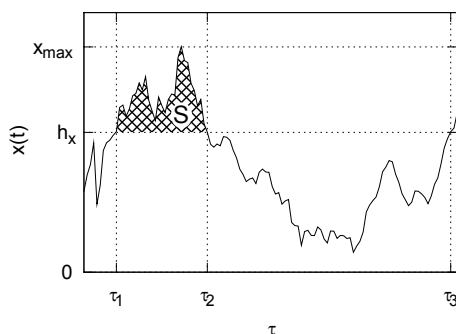
Trečiame disertacijos skyriuje aptariama burbulų (angl. *burst*) statistika, aptinkama empiriniuose duomenyse (nagrinėjamos vienos minutės absoliučios grąžos laiko eilutės) ir laiko eilutėse gautose skaitmeniškai, sprendžiant 2 disertacijos skyriuje aptartas stochastines lygtis. Skyriuje pristatomi rezultatai buvo publikuoti [A10] darbe.

2.3.1 Burbulų statistikos apibrėžimas

Disertacijos 3.1 skyriuje pristatomas vartojamas burbulų statistikos apibrėžimas.

Norėtume atkreipti dėmesį į tai, kad terminas „burbulas“ šioje santraukoje yra vartojamas platesne prasme. Vartodami terminą „burbulas“, mintyje turime ne ekonominį kainų burbulą (angl. *price bubble*), o bendresnį fenomeną, kurį geriausiai apibūdina anglų kalbos žodis „burst“. Abiem atvejais vyksta iš esmės tas pats dalykas – pastebimai padidėja signalo amplitudė. „Burbulo“ sąvoka įprastai siejama būtent su kaina, o mes analizuojame absoliučios grąžos svyravimus. Dar vienas artimas terminas galėtų būti laiko eilutės sproginimas, bet jis turi dar šiek tiek kitokį prasminį atspalvį.

3 pav. pateikiama pavyzdinio signalo, $x(t)$, analizė burbulų statistikos požiūriu. Šiame paveiksle h_x nusako laisvai pasirinktą ribą. Gretimi taškai, esantys virš pasirinktos ribos, yra laikomi vienu burbulu. Paveiksle pavaizduoti trys ribos kirtimo laikai τ_i , maksimali pažymėto burbulo vertė x_{max} , pažymėto burbulo dydis S , kuris yra apibrėžiamas kaip plotas po kreive, bet virš ribos (t.y. pažymėtas plotas). Naudojant ribos kirtimo laikus, patogų įsivesti burbulo trukmę – $T = \tau_2 - \tau_1$.



3 pav. Pavyzdinio signalo $x(t)$ analizė burbulų statistikos požiūriu

2.3.2 Empirinės ir modelinės burbulų statistikos gavimas

Disertacijos 3.2 skyriuje pristatoma empirinių ir modelinių laiko eilučių gavimo ir apdorojimo procedūra. Taip pat aptariama, kaip burbulų statistika yra gaunama iš šių laiko eilučių.

Visame trečiame disertacijos skyriuje yra analizuojamos vienos minutės absoliučios grąžos laiko eilutės, apskaičiuotos 26 Niujorko biržos akcijoms, naudojant prekybos duomenis nuo 2005 metų sausio iki 2007 metų kovo. Gautas r_i laiko eilutės buvo sunormuotos grąžos standartinio nuokrypio atžvilgiu. Siekiant pašalinti momentinių svyravimų įtaką buvo panaudotas vienos valandos lango pločio slenkančio vidurkio filtras.

Empiriniai rezultatai yra lyginami su modeliniais rezultatais, gaunamais sprendžiant (3) stochastinę lygtį ir modeliuojant absoliučią grąžą dvigubu stochastiniu modeliu. Modelinės laiko eilutės, kaip ir empirinės laiko eilutės, buvo sunormuotos grąžos standartinio nuokrypio atžvilgiu. Dvigubo stochastinio modelio laiko eilutės, kaip ir empirinės laiko eilutės, papildomai buvo apdorotos vienos valandos lango pločio slenkamojo vidurkio filtru.

2.3.3 Analizinis burbulų trukmių pasiskirstymo gavimas

Disertacijos 3.3 skyriuje yra išvedama burbulų trukmių, T , pasiskirstymo tikimybės tankio funkcijos analizinė išraiška. Pagrindinė šios analizinės išraiškos išvedimo idėja remiasi pirmojo kirtimo laikų formalizmu (angl. *first hitting time framework*) [73–75]. Jeigu stochastinis procesas prasideda taške nykstamai arti pasirinktos ribos, tai pirmasis šios ribos kirtimo laikas, pagal apibrėžimą, atitinka burbulų trukmę.

Atlikus kintamųjų keitimą, (3) lygtis yra suvedama į Beselio procesą, kurio pirmojo kirtimo laikų tikimybės tankio funkcija yra žinoma [74]. Šios funkcijos išraiškoje figūruoja begalinė suma, kurią galima pakeisti integralu pasinaudojus tuo, kad procesas prasideda nykstamai arti pasirinktos ribos, ir tuo, kad Beselio nuliai yra beveik vienodai tarpusavyje nutolę [76]. Tai

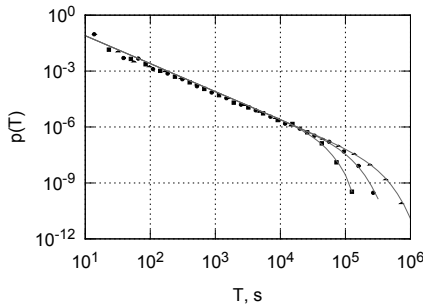
leidžia užrašyti burbulų trukmių, T , tikimybės tankio funkciją:

$$p_{h_y}^{(\nu)}(T) = C_2 \left[\frac{h_y^2 j_{\nu,1} \exp\left(-\frac{j_{\nu,1}^2 T}{2h_y^2}\right)}{T} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{h_y^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{j_{\nu,1}\sqrt{T}}{\sqrt{2}h_y}\right)}{T^{3/2}} \right], \quad (8)$$

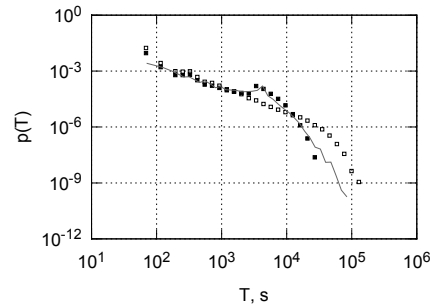
$$h_y = \frac{h_x^{1-\eta}}{\eta-1}, \quad \nu = \frac{\lambda-2\eta+1}{2(\eta-1)}, \quad (9)$$

čia h_y yra pasirinkta riba Beselio proceso atžvilgiu, h_x yra pasirinkta riba (3) lygties atžvilgiu, ν yra Beselio proceso indeksas, o $j_{\nu,1}$ yra pirmasis pirmos rūšies Beselio funkcijos, $J_\nu(\cdot)$, nulis.

Iš (8) išraiškos akivaizdu, kad burbulų trukmės tikimybės tankio funkcija elgiasi pagal $T^{-3/2}$ dėsnį mažoms T reikšmėms, o didesnėms pereina į eksponentinį nukirtimą. Nepaisant visų padarytų prielaidų ir aproksimacijų, (8) išraiška tinkamai aproksimuoja skaitmeninius rezultatus (žr. 4 pav.), bet neaproksimuoja empirinės burbulų trukmių tikimybės tankio funkcijos. Taip nutinka, nes empirinį absoliučios gražos spektrinį tankį pavyksta atkurti tik sudėtingesniu, dvigubu stochastiniu, modeliu. Taip pat empiriniuose duomenyse daug staigių svyravimų, kuriuos reikia pašalinti, o tipinė pašalinimo procedūra, slenkamojo vidurkio filtras, iškreipia gaunamą rezultatą. Naudojant šį filtrą atsiranda nemažų nukrypimų nuo elgsenos, aprašomos (8) išraiška (žr. 5 pav.).



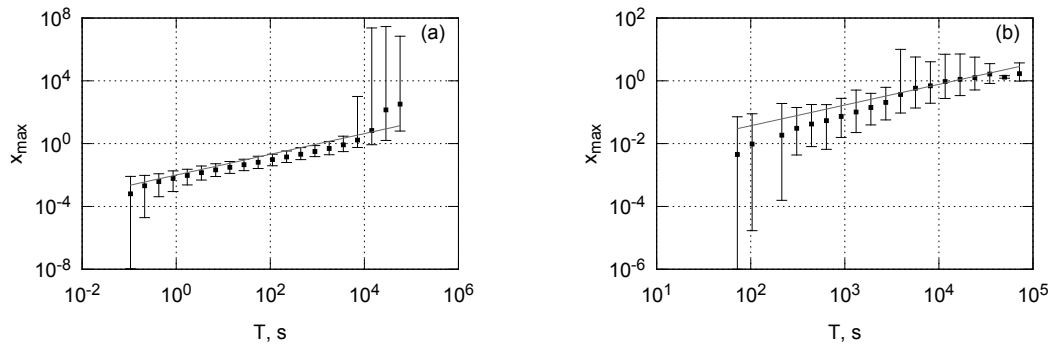
4 pav. Laiko eilučių, generuotų skaitmeniškai sprendžiant (3) lygtį, burbulų trukmių tikimybės tankio funkcijos (kvadratai, apskritimai ir trikampiai) aproksimuoti (8) išraiška. Modelio ir atitinkamų aproksimuojančiųjų funkcijų parametrai: $\sigma^2 = 1/6 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$, $\lambda = 4$, $\eta = 2.5$ (kvadratai), $\eta = 2$ (apskritimai) ir $\eta = 1.5$ (trikampiai). Riba: $h_x = 2$



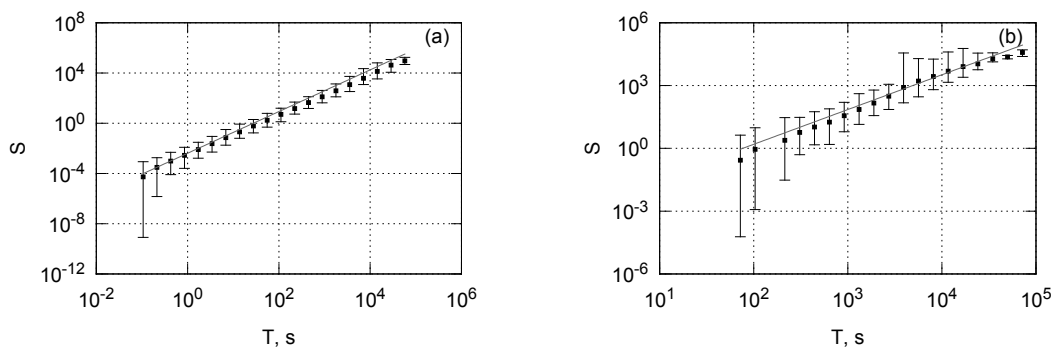
5 pav. Empirinė burbulų trukmių tikimybės tankio funkcija (pilka kreivė) lyginama su dvigubo stochastinio modelio tikimybės tankio funkcija, kai nėra naudojamas išorinis triukšmas ir slenkamojo vidurkio filtras (tušti kvadratai) ir kai yra naudojamas tiek išorinis triukšmas, tiek slenkamojo vidurkio filtras (užpildyti kvadratai). Modelio parametrai: $\sigma^2 = 1/6 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$, $\lambda = 3.6$, $\eta = 2.5$, $\epsilon = 0.017$, $x_{max} = 10^3$, $\bar{r}_0 = 0.4$, $\lambda_2 = 5$. Riba: $h_x = 2$

2.3.4 Laipsninės priklausomybės tarp dydžių, nusakančių burbulų geometriją

Disertacijos 3.4 skyriuje yra parodoma, kad burbulų geometriją nusakančius dydžius, T , x_{max} ir S , sieja laipsniniai sąryšiai. Vienodi sąryšiai yra gaunami tiek iš empirinių (6 (b), 7 (b) ir 8 (b) pav.), tiek iš laiko eilučių, gautų skaitmeniškai sprendžiant (3) lygtį (6 (a), 7 (a) ir 8 (a) pav.).



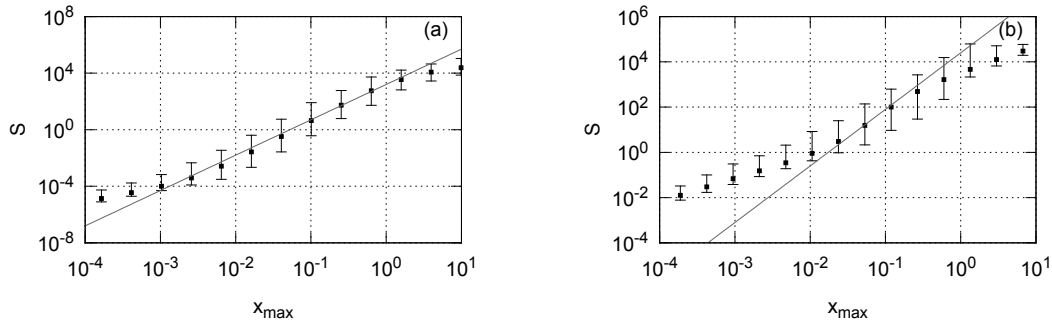
6 pav. $x_{max}-T$ sąryšis, gaunamas iš modelinių (a) ir empirinių (b) laiko eilučių. Abiejuose paveikluose kvadratai atitinka medianą pasirinktame intervale, o paklaidų ribos nurodomos atsižvelgiant į pasirinkto intervalo minimalią ir maksimalią vertes. Pilka kreivė atitinka $x_{max} \sim T^{\frac{2}{3}}$. (3) lygties parametrai yra tokie pat kaip 4 paveiksle



7 pav. $S-T$ sąryšis, gaunamas iš modelinių (a) ir empirinių (b) laiko eilučių. Abiejuose paveikluose kvadratai atitinka medianą pasirinktame intervale, o paklaidų ribos nurodomos atsižvelgiant į pasirinkto intervalo minimalią ir maksimalią vertes. Pilka kreivė atitinka $S \sim T^{\frac{5}{3}}$. (3) lygties parametrai yra tokie pat kaip 4 paveiksle

2.4 Netiesinis GARCH(1,1) kintamumo procesas, pasižymintis laipsninėmis statistinėmis savybėmis

Ketvirtame disertacijos skyriuje yra atliekamas ARCH šeimos modelių ir (3) stochastinės lygties palyginimas. Pagrindinis skyriuje aptariamas rezultatas – netiesinis GARCH(1,1) kinta-



8 pav. S - x_{max} sąryšis, gaunamas iš modelinių (a) ir empirinių (b) laiko eilučių. Abiejuose paveiksluose kvadratai atitinka medianą pasirinktame intervale, o paklaidų ribos nurodomos atsižvelgiant į pasirinkto intervalo minimalią ir maksimalią vertes. Pilka kreivė atitinka $S \sim x_{max}^{\frac{5}{2}}$. (3) lygties parametrai yra tokie pat kaip 4 paveiksle

mumo procesas, generuojantis laiko eilutes, kurioms būdingi laipsninis skirstinys ir laipsninis spektrinis tankis. Skyriuje pristatomi rezultatai buvo publikuoti [A2] darbe.

2.4.1 Tiesinis GARCH

Disertacijos 4.1 skyriuje trumpai aptariamos ARCH modelių esminės idėjos ir tiesinis GARCH modelis. Taip pat parodoma, kad tiesinis GARCH modelis pasižymi laipsniniu tikimybių tankiu, bet gali atkurti tik $1/f^2$ formos spektrinį tankį.

Tęsdami Mandelbroto (Benoit Mandelbrot) ir Famos (Eugene Fama) darbus, Englas (Robert Engle) ir Bollerslevas (Tim Bollerslev) pasiūlė modeliuoti finansinius ir ekonominius kintamuosius, tokius kaip grąža ar prekybos aktyvumas (pažymėkime bendrai – z_t), kaip atsitiktinius dydžius, susidarančius iš dviejų dalių – ilgesniame laiko mastelyje kintančio rinkų kintamumo (angl. *volatility*), σ_t , ir triukšmo, ω_t , [77–79]:

$$z_t = \sigma_t \omega_t. \quad (10)$$

Bendru atveju triukšmo vertės, ω_t , gali būti pasiskirsčiusios įvairiai, bet dažnai pasirenkamas normalusis pasiskirstymas. Šiame skyriuje laikoma, kad ω_t vertės yra pasiskirsčiusios pagal standartinį normalųjį skirstinį ($\langle \omega_t \rangle = 0$ ir $\langle \omega_t^2 \rangle = 1$).

Kintamumo, σ_t , dinamika ARCH modeliuose yra aprašoma kaip laikinis procesas, kur kiekviena nauja σ_t vertė gali priklausyti nuo kelių senesnių sistemos būsenų (pvz., z_t verčių). Bendru atveju GARCH(p,q) kintamumo procesas priklauso nuo p ankstesnių z_t verčių ir q ankstesnių σ_t verčių. Jeigu $p > 1$ ar $q > 1$, tai GARCH(p,q) modelyje yra tiesiogiai realizuota atmintis. Jeigu $p = q = 1$, tai naujos σ_t vertės priklauso tik nuo pačių paskutinių z_t ir σ_t verčių, o GARCH(1,1) modelis neturi tiesiogiai realizuotos atminties. Būtent GARCH(1,1)

kintamumo procesas,

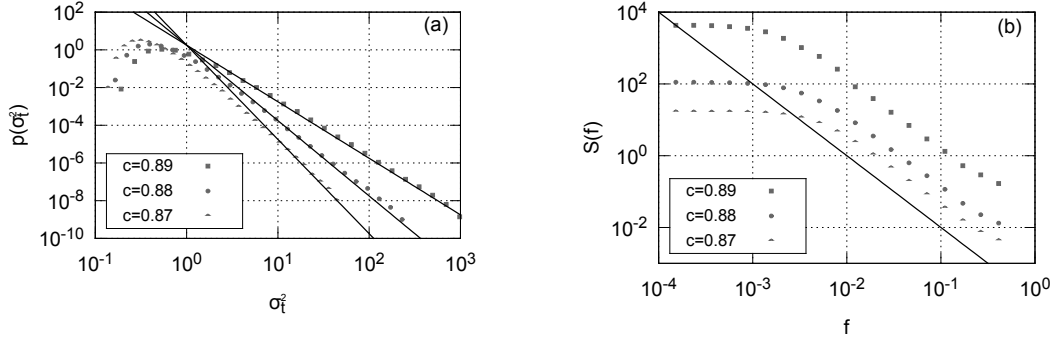
$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^2\omega_{t-1}^2 + c\sigma_{t-1}^2, \quad (11)$$

yra nagrinėjamas šiame skyriuje – lyginamas su (3) lygtimi. Čia a , b ir c yra modelio parametrai: a nustato pastovių svyravimų mastą, b – išoriškai stebimų dydžių, z_t , grįžtamąjį ryšį, c_i – tiesiogiai nestebimo kintamumo, σ_t , grįžtamąjį ryšį.

Difuzijos riboje, taikant Nelsono pasiūlytą metodą [80], iš (11) lygties galima išvesti atitinkamą stochastinę lygtį. Gautą stochastinę lygtį galima palyginti su (3) lygtimi. Šis metodas iš esmės remiasi mintimi, kad a , b ir c parametrų vertės priklauso nuo pasirinkto laiko mastelio, h . Todėl galime imti (11) difuzijos ribą, $h \rightarrow 0$, ir gauti stochastinę lygtį $y = \sigma_t^2$ atžvilgiu [81]:

$$dy = (A - Cy) dt + By dW_t = B^2 \left(1 - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} \frac{y_{\min}}{y} \right) y dt + By dW_t, \quad (12)$$

čia A , B ir C yra parametrai, nepriklausantys nuo laiko mastelio (gaunami skleidžiant senesius parametrus Teiloro eilute): $a_h = Ah$, $1 - b_h - c_h = Ch$, $2b_h^2 = B^2h$. Parametrų λ ir y_{\min} prasmė tampa aiški lyginant (12) lygtį su (3) lygtimi – λ nusako stacionaraus tikimybės tankio funkcijos laipsnio rodiklį, o y_{\min} eksponentinio nukirtimo vietą: $\lambda = 2 + \frac{2C}{B^2} = 2 + \frac{1 - b_h - c_h}{b_h^2}$, $y_{\min} = \frac{2A}{B^2} = \frac{a_h}{b_h^2}$.



9 pav. Statistinės σ_t^2 laiko eilutės, gautos sprendžiant (11) lygtį, savybės: tikimybės tankio funkcija (a) ir spektrinis tankis (b). (11) lygties parametrai: $a = 0.015$, $b = 0.1$, $c = 0.89$ (kvadratai), 0.88 (apskritimai), 0.87 (trikampiai). Juodos kreivės yra laipsninio pobūdžio aproksimacijos: (a) $p(\sigma_t^2) \sim (\sigma_t^2)^{-3}$, $(\sigma_t^2)^{-4}$ ir $(\sigma_t^2)^{-5}$, (b) $S(f) \sim f^{-2}$

9 pav. parodyta, kad tiesinio GARCH(1,1) σ_t^2 laiko eilutės pasižymi laipsniniais skirstiniais, kurių uodegos polinkį gerai nusako pateiktas sąryšis. Tačiau šių laiko eilučių spektrinis tankis, nepaisant parametrų įvairovės gali būti tik $1/f^2$ formos.

2.4.2 Netiesinės GARCH(1,1) kintamumo proceso modifikacijos

Įvairesnių formų, $1/f^\beta$, spektrinį tankį būtų galima atkurti į (11) lygtį įterpus netiesišku-
mą. Disertacijos 4.2 skyriuje yra pateikiamos dvi galimos kintamumo proceso modifikacijos.

Pirma,

$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^\mu \omega_{t-1}^\mu + c\sigma_{t-1}^2, \quad (13)$$

yra gana apribota, nes netiesiškumo laipsnis μ turi būti nelyginis sveikasis skaičius, didesnis už 2. Antra,

$$\sigma_t^2 = a + b\sigma_{t-1}^\mu |\omega_{t-1}|^\mu + \sigma_{t-1}^2 - c\sigma_{t-1}^\mu, \quad (14)$$

suteikia daugiau laisvės, nes μ gali būti bet koks realusis skaičius, didesnis už 2. Priešingai nei (11) lygtis, šios modifikuotos lygtys neužtikrina vien teigiamų σ_t^2 verčių, todėl šių netiesinių procesų atveju būtina naudoti atspindinčią ribą ties $\sigma_t^2 = 0$.

Panašūs netiesiniai GARCH kintamumo procesai jau buvo išbandyti empiriniuose darbuose [79, 82]. [79] darbe visi praeitį atspindintys nariai buvo pakelti apibendrintu laipsniu, o atlikus empirinę analizę buvo parodyta, kad tiksliausiai istoriniai duomenys yra atkuriami, kai apibendrintas laipsnis yra apytiksliai lygus 2. [82] darbe kintamumu laikomas ne antrosios eilės momentas, dispersija, o aukštesnių eilių momentai.

Pirmos modifikacijos difuzijos riba

Disertacijos 4.2.1 skyriuje, taikydami Nelsono pasiūlytą metodą [80], gauname stochastinę lygtį, analogišką (13) lygčiai:

$$dy = \left(\frac{A}{y^{\mu-1}} - \frac{C}{y^{\mu-2}} \right) y^{\mu-1} dt + By^{\frac{\mu}{2}} dW_t, \quad (15)$$

kurioje A, B (turi būti teigiamas) ir C vėlgi yra parametrai, nepriklausantys nuo laiko mastelio (gaunami skleidžiant senuosius parametrus Teiloro eilute): $a_h = Ah$, $1 - c_h = Ch$, $\langle \omega^{2\mu} \rangle b_h^2 = B^2 h$. Palyginus su (3) lygtimi matyti, kad A ir C parametrai įgauna eksponentinių apribojimų prasmę, skirstinio laipsnio rodiklis yra lygus μ , o spektrinio tankio laipsnio rodiklis yra susijęs su μ :

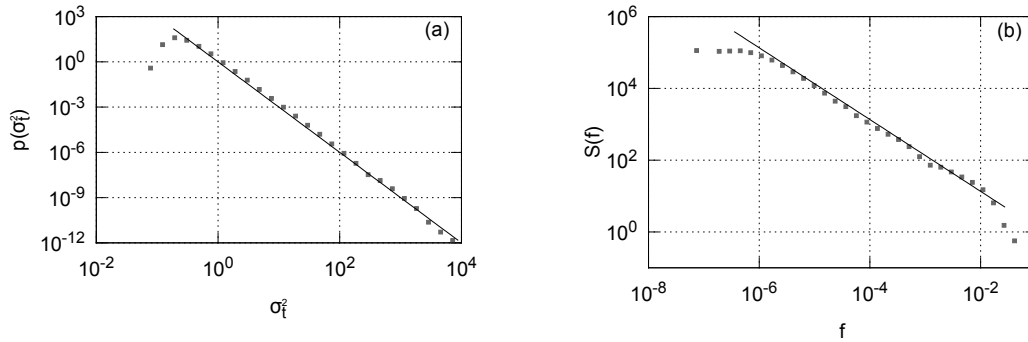
$$S(f) \sim \frac{1}{f^\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\mu - 3}{\mu - 2}. \quad (16)$$

Naudodamiesi šiomis išvaidomis, atkūrėme $1/f$ triukšmą (žr. 10 pav.).

Antros modifikacijos difuzijos riba

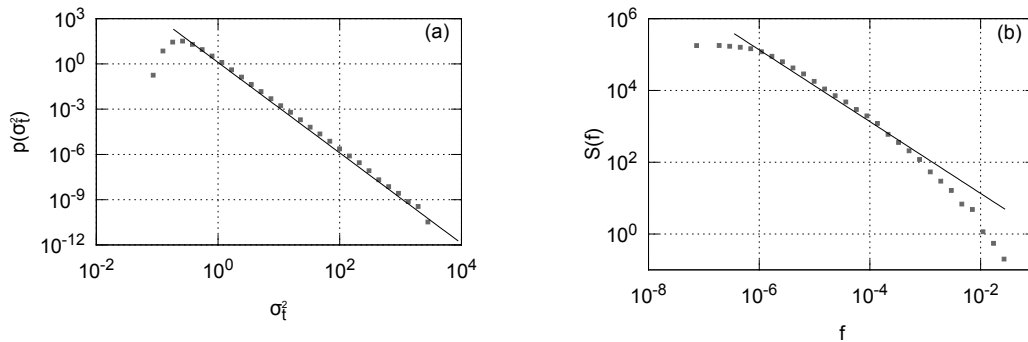
Disertacijos 4.2.2 skyriuje, taikydami tą patį Nelsono pasiūlytą metodą [80], gauname stochastinę lygtį, analogišką (14) lygčiai:

$$dy = \left(\frac{A}{y^{\mu-1}} + \frac{C}{y^{\frac{\mu}{2}-1}} \right) y^{\mu-1} dt + By^{\frac{\mu}{2}} dW_t, \quad (17)$$



10 pav. σ_t^2 laiko eilutės, gautos sprendžiant (13) lygtį, statistinės savybės: tikimybės tankio funkcija (a) ir spektrinis tankis (b). (13) lygties parametrai: $\mu = 3$, $a = 10^{-6}$, $b = 10^{-3}$, $c = 1$. Juodos kreivės atitinka laipsnines aproksimacijas: (a) $p(\sigma_t^2) \sim (\sigma_t^2)^{-3}$ ir (b) $S(f) \sim 1/f$

kurioje A , B (turi būti teigiamas) ir C yra parametrai, nepriklausantys nuo laiko mastelio (gaunami skleidžiant senuosius parametrus Teilorio eilute): $a_h = Ah$, $\langle |\omega|^\mu \rangle b_h - c_h = Ch$, $\langle |\omega|^{2\mu} \rangle b_h^2 = B^2 h$. Gauta lygtis iš esmės panaši į (15) lygtį, todėl tinka ankstesnės išvalgos – skirstinio laipsnio rodiklis yra lygus μ , o spektrinio tankio laipsnio rodiklio priklausomybė nuo μ yra aprašoma (16) išraiška. 11 pav. parodėme $1/f$ triukšmą.



11 pav. σ_t^2 laiko eilutės, gautos sprendžiant (14) lygtį, statistinės savybės: tikimybės tankio funkcija (a) ir spektrinis tankis (b). (14) lygties parametrai: $\mu = 3$, $a = 10^{-6}$, $b = 10^{-3}$, $c = 1.595769 \cdot 10^{-3}$. Juodos kreivės atitinka laipsnines aproksimacijas: (a) $p(\sigma_t^2) \sim (\sigma_t^2)^{-3}$ ir (b) $S(f) \sim 1/f$

Pastaba apie C parametro įtaką laipsninėms statistinėms savybėms

Disertacijos 4.2.3 skyriuje yra trumpai aptariama parametro C įtaka rezultatams. Kuo labiau parametras C yra nutolęs nuo nulio, tuo sunkiau aptikti laipsninę pasiskirstymo uodegą ir kitokį nei $1/f^2$ spektrinį tankį.

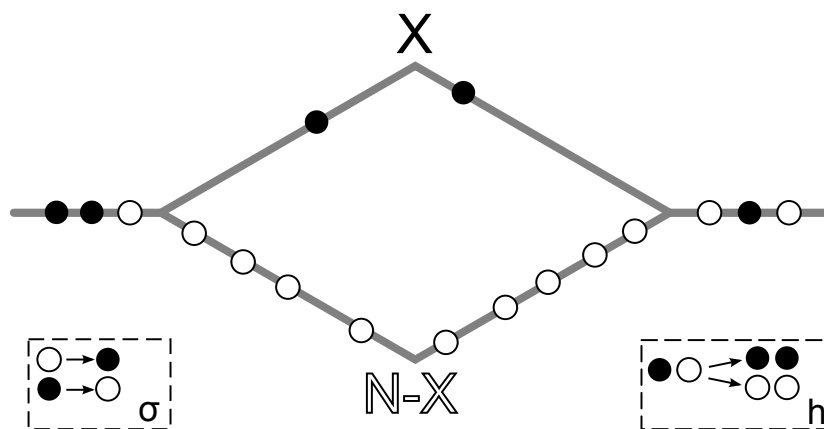
2.5 Dviejų būsenų sistemos modeliavimas bandos jausmo sąveika

Penktame disertacijos skyriuje pristatomas dviejų būsenų agentų modelis, besiremiantis bandos jausmo sąveika. Kadangi bandos jausmo sąveika gali būti interpretuojama tiek kaip lokali, tiek kaip globali sąveika, šiame skyriuje yra pateikiamos įžvalgos, kokia galėtų būti sąveikų topologijos įtaka. Naudojantis agentų modeliu yra išvedamas stochastinis modelis, kuris aprašo agentų modelio makroskopinę dinamiką. Originalūs rezultatai, kurie yra pristatomi šiame skyriuje, buvo publikuoti [A3] darbe.

2.5.1 Kirmano bandos jausmo agentų modelis

Disertacijos 5.1 skyriuje trumpai pristatomas bandos jausmo agentų modelis.

1993 metais, įkvėptas belgų entomologų grupės darbų [5–7], prancūzų ekonomistas Kirmanas (Alan Kirman) pasiūlė elementarų matematinį bandos jausmo modelį [55]. Šį modelį būtų galima iliustruoti schema, kuri yra pavaizduota 12 paveiksle. Šioje schemoje apskritimai žymi skruzdėles, bendriau – agentus, kurios renkasi vieną iš dviejų identiškų takų, bendriau – būsenų, vedančių nuo kolonijos link maisto šaltinio. Juodi apskritimai atitinka skruzdėles, agentus, pasirinkusias viršutinį taką, pirmą būseną, o balti apskritimai – apatinį taką, antrą būseną. Schemoje punktyrais išskirtos galimos sąveikos – savarankiški virsmai (aprašomos parametru σ) ir bandos jausmo sąveikos (parametras h).



12 pav. Kirmano bandos jausmo modelio iliustravimas entomologinio eksperimento schema

Bendru atveju bandos jausmo modelis gali būti matematiškai aprašytas šiomis dviem vieno

žingsnio perėjimo tikimybės:

$$p(X \rightarrow X + 1) = (N - X) \left[\sigma_1 + \frac{hX}{N^{1-\alpha}} \right] \Delta t, \quad (18)$$

$$p(X \rightarrow X - 1) = X \left[\sigma_2 + \frac{h(N - X)}{N^{1-\alpha}} \right] \Delta t, \quad (19)$$

čia N yra agentų skaičius sistemoje, X yra agentų, pasirinkusių pirmą būseną, skaičius, o α parametro vertės nusako, ar sąveikos yra lokali ($\alpha = 0$), ar globalios ($\alpha = 1$). Šis vieno žingsnio tikimybių užrašymas remiasi [A3] darbo rezultatais, kurie suteikia prasmę tarpinėms α vertėms, $0 < \alpha < 1$. Šis užrašymas yra plačiau aptariamas vėlesniame disertacijos 5.2 skyriuje.

Simetrija Kirmano modelyje

Disertacijos 5.1.1 skyriuje yra aptariamas atskiras originalaus Kirmano modelio atvejis, kai $\sigma_1 = \sigma_2$. Šio atvejo analizė rodo, kad Kirmano modelyje yra du skirtingi elgsenos „režimai“. Kai $h > \sigma$ vyrauja bandos jausmas, todėl dažniausiai dauguma agentų pasirenka vieną būseną. Kai $\sigma > h$, vyrauja savarankiški virsmai, todėl dažniausiai panašus agentų skaičius pasirenka abi būsenas.

Asimetrija Kirmano modelyje

Disertacijos 5.1.2 skyriuje yra aptariamas Kirmano modelio atvejis, kai $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

2.5.2 Makroskopinė Kirmano modelio interpretacija

Disertacijos 5.2 skyriuje iš Kirmano agentų modelio yra išvedamos lygtys, aprašančios makroskopinę populiacijų dinamiką didelių N riboje.

Makroskopinis dinamikos aprašymas naudojant gimimo-mirties procesų formalizmą

Disertacijos 5.2.1 skyriuje iš agentų modelio išvedama stochastinė lygtis, aprašanti agentų būsenų dinamiką.

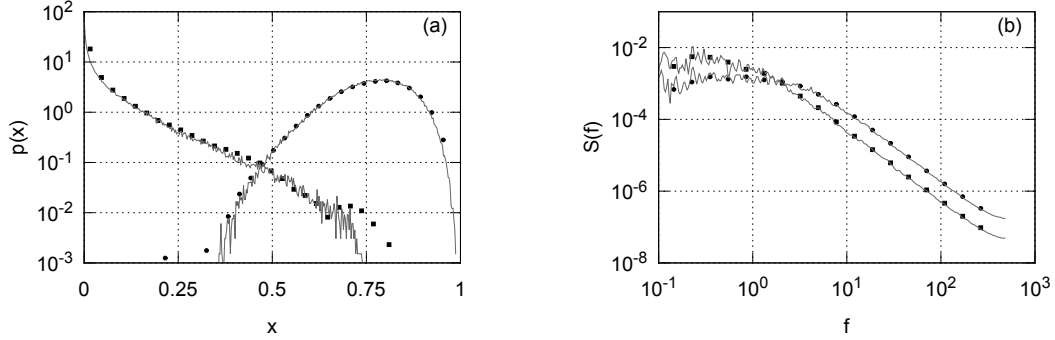
Kirmano modelio pagrindą sudaro dvi vieno žingsnio tikimybės, todėl nesudėtinga užrašyti šią dinamiką aprašančią pagrindinę kinetinę lygtį. Vieno žingsnio operatoriai, kurie yra naudojami gimimo-mirties procesų formalizme [83], leidžia užrašyti pagrindinę kinetinę lygtį kompaktiškai. Šių operatorių skleidimas Teiloro eilute mažų žingsnių, arba didelių N , riboje leidžia greitai užrašyti atitinkamą Fokerio–Planko lygtį. Kai sąveikos yra globalios, $\alpha = 1$, iš

Fokerio–Planko lygties trivialiai išvedama stochastinė lygtis:

$$dx = [\varepsilon_1(1 - x) - \varepsilon_2x]dt_s + \sqrt{2x(1 - x)}dW_s, \quad (20)$$

čia $x = X/N$, didelių N riboje šis skaičius gali būti laikomas realiuoju, $\varepsilon_i = \sigma_i/h$, $t_s = ht$.

13 pav. yra parodytas statistinis stochastinės lygties ir Kirmano agentų modelio ekvivalentumas.



13 pav. Laiko eilučių, gautų iš agentų modelio (kvadratai ir apskritimai) ir sprendžiant stochastinę lygtį (pilkos kreivės), tikimybės tankio funkcijos (a) ir spektrinio tankio (b) palyginimas. Pasirinktos parametrų vertės: $\varepsilon_1 = 0.2$ (kvadratai ir pilkos kreivės už jų) ir 16 (apskritimai ir pilkos kreivės už jų), $\varepsilon_2 = 5$, $h = 1$, $N = 100$

Baso difuzijos modelis kaip atskiras Kirmano modelio atvejis

Disertacijos 5.2.2 skyriuje yra parodoma, kad Baso difuzijos modelis yra atskiras Kirmano modelio atvejis.

Baso (Frank Bass) difuzijos modelis yra vienas žinomiausių ir labiausiai cituojamų marketingo teorijos modelių. Šis modelis aprašo naujo produkto ar technologijos pardavimų ar paplitimo spartą. Matematiškai jis yra užrašomas kaip paprastoji diferencialinė lygtis.

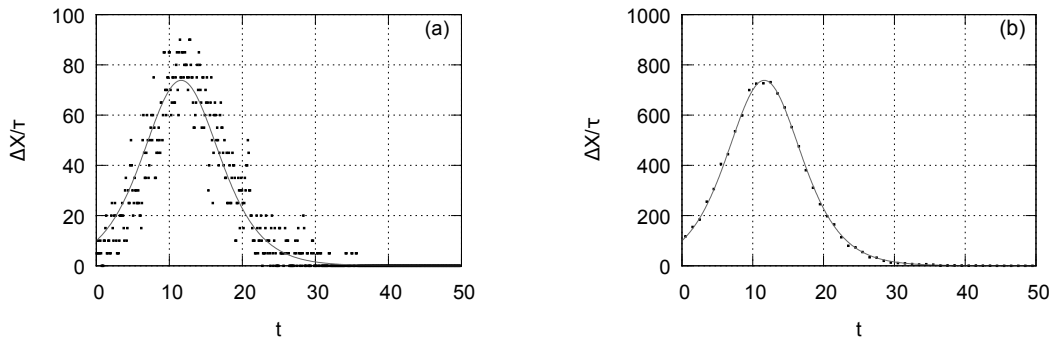
Kai bandos sąveikos yra lokalias, $\alpha = 0$, tai vietoj (20) lygties yra gaunama panašios formos, be nario su Vynerio procesu, paprastoji diferencialinė lygtis. Ji nėra panaši į Baso difuzijos modelio lygtį, bet sutapimą galima gauti padarius kelias prielaidas. Visų pirma tarkime, kad visi agentai gali būti arba potencialūs, arba esami pirkėjai. Taip pat tarkime, kad parduodamas produktas ar technologija yra ilgalaikio vartojimo (angl. *durable*), todėl pereiti iš esamo pirkėjo būsenos į potencialaus pirkėjo būseną yra neįmanoma. Tokiu atveju:

$$p(X \rightarrow X + 1) = (N - X) \left(\sigma + \frac{hX}{N} \right) \Delta t, \quad p(X \rightarrow X - 1) = 0, \quad (21)$$

iš kurių, naudojantis tuo pačiu gimimo-mirties procesų formalizmu, gali būti užrašyta diferencialinė lygtis:

$$\frac{d}{dt}X(t) = [N - X(t)] \left[\sigma + \frac{h}{N}X(t) \right], \quad X(0) = 0. \quad (22)$$

Gauta paprastoji diferencialinė lygtis identiška Baso difuzijos modelio lygčiai. 14 pav. yra pateikiamas laiko eilučių, gautų iš Kirmano agentų modelio ir makroskopinio Baso difuzijos modelio, esant skirtingiems rinkos potencialams, N , ir stebėjimo intervalams, τ , palyginimas.



14 pav. Baso difuzijos modelio (pilkos kreivės) ir modifikuoto Kirmano agentų modelio (juodi taškai) laiko eilučių palyginimas: (a) $N = 10^3$ ir $\tau = 0.1$, (b) $N = 10^4$ ir $\tau = 1$. Kiti parametrai: $\sigma = 0.01$, $h = 0.275$

2.5.3 Sąveikų topologijos svarba

Disertacijos 5.3 skyriuje yra analizuojamas bandos jausmo modelis, kai sąveikos tarp agentų yra tarpinio, nei lokalaus, nei globalaus, pobūdžio, $0 < \alpha < 1$. Šios analizės metu parodomas tolydus perėjimas nuo ekstensyvos prie neekstensyvos statistikos palaiptiui perėinant nuo lokalių sąveikų prie globalių.

Tinklų formavimo algoritmas

[84] darbe Kirmano modelis buvo išbandytas naudojant tris skirtingas sąveikų topologijas – atsitiktinį, mažo pasaulio ir bemastelį tinklus. Šios trys topologijos atitinka globalias (atsitiktinis tinklas) arba lokalias (mažo pasaulio ir bemastelis tinklai) sąveikas, apie kurias buvo rašyta ankstesnėse disertacijos dalyse. Disertacijos 5.3.1 skyriuje pristatomas tinklų formavimo modelis, generuojantis tinklus, pasižyminčius tarpinio pobūdžio sąveikomis, – tinklus, kurių vidutinis mazgų laipsnis, vidutinis agentų sąveikų skaičius, gali priklausyti nuo mazgų skaičiaus sub-tiesiškai:

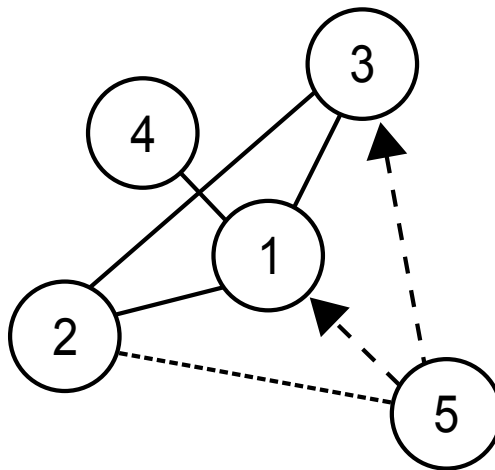
$$\langle d \rangle \sim N^\alpha, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (23)$$

čia α vidutinio mazgų laipsnio priklausomybės rodiklis. Svarbu pasakyti, kad tokia priklausomybe pasižymi gana daug realių socialinio pobūdžio tinklų [85–89].

Siūlomas algoritmas remiasi bemastelio tinklo algoritmu įterpiant papildomą žingsnį – ryšių (briaunų) su pasirinkto mazgo kaimynais formavimą. Lyginant su panašiais darbais, esmi-

nis skirtumas yra tas, kad šios papildomos briaunos suformuojamos su tikimybe, priklausančia nuo pasirinkto mazgo kaimynų skaičiaus.

15 pav. aptariamas pavyzdinis tinklo generavimo etapas. Prie keturių mazgų tinklo yra jungiamas penktas mazgas. Šis naujas mazgas pagal bemastelio tinklo algoritmą pasirinko suformuoti briauną su antru mazgu (punkttyrine linija be strėlytės). Papildomo žingsnio metu penktas mazgas gali suformuoti naujas briaunas su pirmu mazgu ir trečiu mazgu, nes jie yra antro mazgo kaimynai (priešingai nei ketvirtas mazgas), su tikimybe, priklausančia nuo antro mazgo laipsnio ($d_2 = 2$).



15 pav. Pavyzdinis tinklo generavimo etapas. Prie keturių mazgų yra jungiamas naujas, penktas, mazgas

Bandos jausmo modelio susiejimas su tinklais

Disertacijos 5.3.2 skyriuje padedami pamatai suderintinio lauko aproksimacijai – užrašoma vieno agento būsenos pakitimo tikimybė. Ši tikimybė yra suvidurkinama per skirtingus agentus parodant statistinį panašumą su anksčiau užrašytomis vieno žingsnio tikimybėmis, (18) ir (19) išraiškos. Esminis šiame disertacijos skyriuje aptariamas pasiekimas yra tas, kad naujasis tinklo formavimosi algoritmas buvo panaudotas suteikiant prasmę $\alpha \in (0, 1)$ vertėms.

Aproksimacija suderintiniu lauku

Disertacijos 5.3.3 skyriuje, taikant gimimo-mirties procesų formalizmą yra išvedama stochastinė lygtis, nusakanti makroskopinę bandos jausmo modelio, susieto su tinklu, dinamiką:

$$dx = \varepsilon(1 - 2x) dt_s + \sqrt{\frac{2N^\alpha x(1-x) + \varepsilon}{N}} dW_s, \quad (24)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{hd_0}, \quad t_s = hd_0 t, \quad \langle d \rangle = d_0 N^\alpha. \quad (25)$$

Tolydus perėjimas nuo neekstensyvios prie ekstensyvios statistikos

Disertacijos 5.3.4 skyriuje parodomas tolydus perėjimas nuo neekstensyvios prie ekstensyvios statistikos.

Stacionarus x tikimybės tankis,

$$p(x) = C [\varepsilon + 2N^\alpha x(1-x)]^{\varepsilon N^{1-\alpha} - 1}, \quad (26)$$

gali būti užrašytas q -Gauso tikimybės tankio funkcija [90], kurios neekstensyvumo rodiklis q būtų susijęs su modelio parametrais:

$$q = 1 - \frac{1}{\varepsilon N^{1-\alpha} - 1}. \quad (27)$$

Taigi, keičiant modelio parametrus N ir α , galima stebėti tolydų perėjimą iš ekstensyvios statistikos, $q = 1$, į neekstensyvią, $q < 1$.

2.6 Finansų rinkų agentų modeliai

Penktame disertacijos skyriuje pristatytas bandos jausmo modelis yra bendro pobūdžio, todėl, prieš jį naudojant finansų rinkoms modeliuoti, yra būtina pateikti jo interpretavimą finansų rinkų kontekste ir atsižvelgti į svarbias finansų rinkų ypatybes. Šeštame disertacijos skyriuje palaipsniui konstruojami vis sudėtingesni finansų rinkų modeliai, kol sukuriamas jungtinis modelis, kurio generuojamos laiko eilutės pasižymi absoliučios gražos skirstiniu ir spektriniu tankiu, kurie atitinka stebimus empirinėse laiko eilutėse. Šeštame disertacijos skyriuje pristatomi rezultatai buvo publikuoti [A4, A6-A9, A11, A12] darbuose.

2.6.1 Finansų rinkų interpretacija

Disertacijos 6.1 skyriuje aptariami skirtingi Kirmano modelio interpretavimo aspektai finansų rinkų kontekste.

Kainodaros įtraukimas į Kirmano modelį

Disertacijos 6.1.1 skyriuje aptariamas kainos įterpimas į bendrą bandos jausmo modelį.

Kirmano modelis aprašo dviejų būsenų populiacijos dinamiką, todėl pirmas žingsnis, interpretuojant šį modelį, turėtų būti prasmės šioms būsenoms suteikimas. Daugelyje agentų modelių, pasiūlytų per pastaruosius 15 metų [51], įprastas pasirinkimas yra dalį agentų laikyti fundamentalistais (angl. *fundamentalist*; atitinkamai naudojamas indeksas f), o likusius – grafiniais prekiautojais (angl. *chartist*, *noise trader*; indeksas – c).

Fundamentalistai yra racionalūs agentai, kurie prekiauja vertybiniais popieriais, atsižvelgdami į prieinamą ekonominę informaciją. Šią informaciją jie įprasmina suteikdami vertybiniams popieriams fundamentalią vertę (angl. *fundamental price*), $P_f(t)$. Fundamentalistai tikisi, kad laikui bėgant rinkos kaina, $P(t)$, artės prieš šios vertės, todėl, matydami, kad $P(t) < P_f(t)$, fundamentalistai vertybinius popierius pirks, o jei $P(t) > P_f(t)$, tai vertybinius popierius parduos.

Grafiniai prekiautojai yra agentai, kurie siekia greito pelno – jie bando nuspėti momentinių rinkos tendencijų kitimą ir tuo pasinaudoti. Realūs grafiniai prekiautojai sprendimams priimti naudoja techninės analizės įrankius – apdorodami praeities duomenis ieško juose tendencijų ar pasikartojančių struktūrų, pagal kurias sprendžia, pirkti ar parduoti. Kadangi techninės analizės įrankių įvairovė yra gana didelė, patogu įvesti dydį ξ , kuris atspindi vidutinę grafinių prekiautojų nuotaiką. Dalyje darbų ši nuotaika ar jos pokyčiai modeliuojami kaip paprastas triukšmas [56].

Toks agentų modelio būsenų interpretavimas leidžia pasinaudoti Valraso (Leon Walras) dėsnio [91] ir išvesti kainos priklausomybę nuo būsenų užimtumo:

$$P(t) = P_f(t) \exp \left[r_0 \frac{x_c(t)}{x_f(t)} \xi(t) \right] = P_f(t) \exp \left[r_0 \frac{x_c(t)}{1 - x_c(t)} \xi(t) \right]. \quad (28)$$

Neprarasdami bendrumo, galime laikyti $P_f(t)$ pastoviu dydžiu ir įvesti logaritminę kainą, apibrėžtą fundamentalios vertės atžvilgiu, $p(t) = \ln \frac{P(t)}{P_f}$. Darant prielaidą, kad ξ svyravimai yra greitesni nei x_c , gražą būtų galima užrašyti tokiu pavidalu:

$$r_T(t) = p(t) - p(t - T) = r_0 y(t) \zeta_T(t), \quad (29)$$

čia $y(t) = \frac{x_c(t)}{1 - x_c(t)}$ nusako ilgalaikį gražos kitimą, disertacijoje šis dydis dažnai vadinamas moduluojančia graža (angl. *modulating return*), ir $\zeta_T(t) = \xi(t) - \xi(t - T)$ nusako greitus grafinių prekiautojų nuotaikų svyravimus, kurie gali būti modeliuojami kaip triukšmas [56].

Kintamas prekybos aktyvumas

Disertacijos 6.1.2 skyriuje yra atsižvelgiama į tai, kad prekybos aktyvumas realiose finansų rinkose yra kintamas.

Originaliame Kirmano modelyje skruzdėlės sąveikauja pastoviais periodais, bet realiose rinkose sandoriai vyksta skirtingu dažnumu. Į tai atsižvelgti galima perrašius μ_{ij} išraiškas:

$$\mu_{21}(X, N) = \sigma_1 + \frac{hX}{\tau(X)}, \quad \mu_{12}(X, N) = \frac{\sigma_2 + h(N - X)}{\tau(X)}, \quad (30)$$

čia $\tau(X)$ nusako, kaip kinta sąveikos periodai priklausomai nuo esamos sistemos būsenos. σ_1 nėra dalijamas iš $\tau(X)$, nes fundamentalistai, antra būseną, yra racionalūs – jų sprendimų neveikia pakitęs prekybos aktyvumas.

Irašius $\tau(x)$ priklausomybę, stochastinė lygtis $x = X_c/N$ atžvilgiu įgauna tokį pavidalą:

$$dx = \left[\varepsilon_1(1-x) - \frac{\varepsilon_2 x}{\tau(x)} \right] dt_s + \sqrt{\frac{2x(1-x)}{\tau(x)}} dW_s. \quad (31)$$

2.6.2 Stochastinis moduliuojančios grąžos modelis

Disertacijos 6.2 skyriuje, naudojantis Ito kintamųjų keitimo formule, yra išvedama stochastinė lygtis moduliuojančios grąžos, $y = \frac{x}{1-x}$, atžvilgiu,

$$dy = \left[\varepsilon_1 + y \frac{2 - \varepsilon_2}{\tau(y)} \right] (1+y) dt_s + \sqrt{\frac{2y}{\tau(y)}} (1+y) dW_s. \quad (32)$$

Pateiktų stochastinių lygčių išvedimas nuo matematinio $\tau(y)$ pavidalo nepriklauso, tačiau norint lygtį spręsti skaitmeniškai, ji reikia apibrėžti. Empirinių darbų kontekste [41, 46] racionaliausia pasirinkti $\tau(y) = y^{-\alpha}$ pavidalą.

Įdomu, kad, esant mažam ε_1 , toks pasirinkimas padaro (32) lygtį (3) stochastinių lygčių klasės nare. Sąryšis tarp šių lygčių parametrų, $\eta = \frac{3+\alpha}{2}$ ir $\lambda = \varepsilon_2 + \alpha + 1$, leidžia tikėtis generuoti laiko eilutes, pasižyminčias tokiomis statistinėmis savybėmis:

$$p(x) \sim x^{-\lambda}, \quad \lambda = \varepsilon_2 + \alpha + 1, \quad S(f) \sim f^{-\beta}, \quad \beta = 1 + \frac{\varepsilon_2 + \alpha - 2}{1 + \alpha}. \quad (33)$$

Kai $\varepsilon_2 = 2$, tai (32) lygtis atitinka gerai žinomą CEV procesą [75]. 16 pav. matoma atkuriamų λ ir β verčių įvairovė.

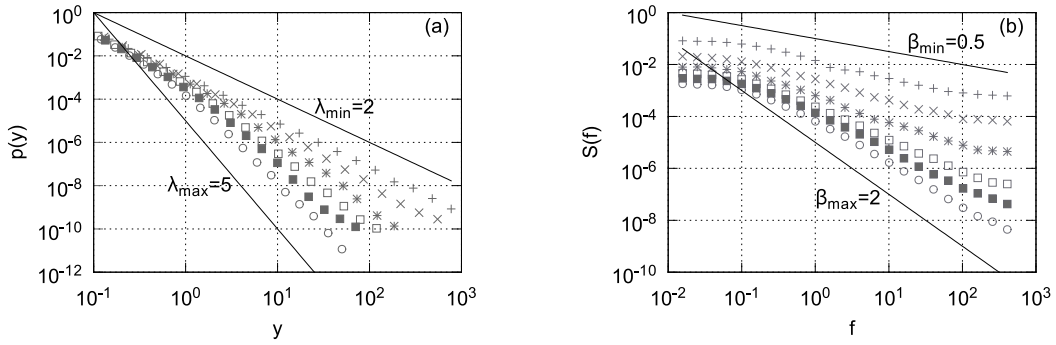
2.6.3 Skirtingi absoliučios grąžos proceso laiko masteliai

Norint generuoti laiko eilutes, pasižyminčias empiriniu absoliučios grąžos spektriniu tankiu moduliuojančios grąžos modelio nepakanka, todėl disertacijos 6.3 skyriuje bandos jausmo modelio taikymas finansų rinkoms išplečiamas – įtraukiamas greitų nuotaikos svyravimų, ξ , aprašymas.

Trijų būsenų agentų modelis

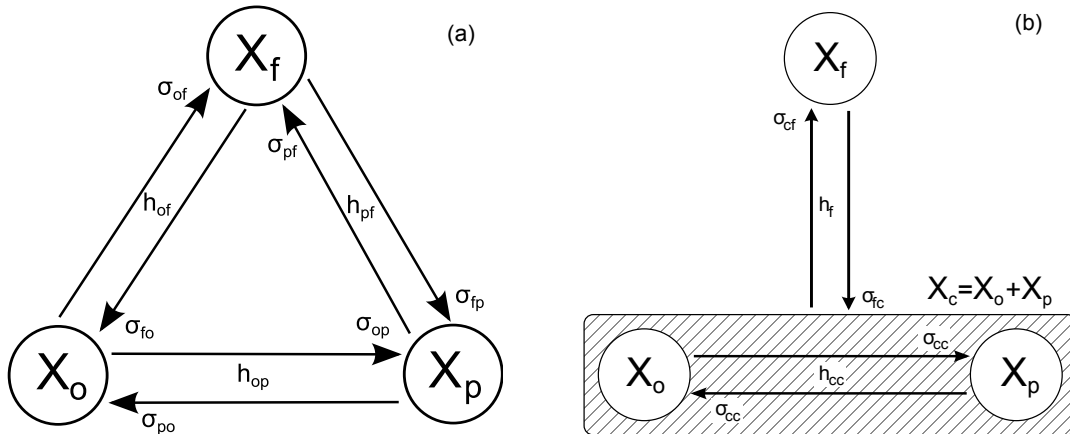
Disertacijos 6.3.1 skyriuje pristatomas trijų būsenų agentų modelis.

Nuotaikos svyravimų aprašymas triukšmu nėra pakankamas, todėl būtų galima bandyti nuotaikų svyravimus aprašyti bandos jausmo modeliu. Dviejų būsenų bandos jausmo modelį



16 pav. Laiko eilučių, generuotų skaitmeniškai sprendžiant (32) lygtį, tikimybės tankio funkcijų (a) ir spektrinių tankių (b) rodiklių įvairovė. Juodos tiesės yra laipsninės funkcijos, turinčios minimalų arba maksimalų toje paveikslo dalyje esantį laipsnio rodiklį: (a) $\lambda_{min} = 2$ ir $\lambda_{max} = 5$, (b) $\beta_{min} = 0.5$ ir $\beta_{max} = 2$. Parametrų rinkinys: $\alpha = 1$, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\varepsilon_2 = 0.1$ (pliusas), 0.5 (kryželis), 1 (žvaigždutė), 1.5 (atviras kvadratas), 2 (užpildytas kvadratas) ir 3 (atviras apskritimas)

galima performuluoti trijų būsenų, fundamentalistai, optimistai (indeksas o) ir pesimistai (p), atvejui. Pilnas trijų būsenų modelio formulavimas yra daug sudėtingesnis nei dviejų būsenų modelis (žr. 17 pav. (a)), tačiau adiabatiniame artėjime trijų būsenų modelis gali būti supaprastinamas (žr. 17 pav. (b)).



17 pav. Pilno (a) ir supaprastinto (b) trijų būsenų modelio schemas. Rodyklės rodo vykstančių perėjimų kryptis. (a) dalyje yra trys grupės rodyklių po dvi rodykles (rodančias į priešingas puses), o (b) dalyje tik dvi grupės. Kiekviena rodyklių pora atitinka įprastą dviejų būsenų bandos jausmo modelį. Perėjimus atitinkantys parametrai užrašyti greta atitinkamų rodyklių

Makroskopinė trijų būsenų agentų modelio interpretacija

Disertacijos 6.3.2 skyriuje yra išvedamos stochastinės lygtys, aprašančios trijų būsenų agentų modelio dinamiką.

Apibrėžus dvimačius vieno žingsnio operatorius, galima kompaktiškai užrašyti pagrindinę kinetinę lygtį, aprašančią pilną trijų būsenų modelį (17 pav. (a)). Skleidžiant šiuos operatorius Teiloro eilute, nesudėtinga gauti Fokerio–Planko lygtį. Iš pastarosios adiabatiniame

artėjime yra išvedama dviejų stochastinių lygčių sistema:

$$d x_f = [(1 - x_f)\sigma_{cf} - x_f\sigma_{fc}] dt + \sqrt{2h_1x_f(1 - x_f)} d W_1, \quad (34)$$

$$d \xi = -2\xi\sigma_{cc} dt + \sqrt{2Hh_1(1 - \xi^2)} d W_2, \quad (35)$$

čia σ_{ij} aprašo perėjimus iš būsenos i į būseną j (cc indeksas žymi perėjimus tarp optimistų ir pesimistų), h_1 nusako bandos jausmo stiprumą tarp grafinių prekyautojų ir fundamentalistų, H nusako, kiek kartų optimistų ir pesimistų bandos jausmas yra stipresnis palyginti su h_1 , o W_1 ir W_2 yra nekoreliuoti standartiniai Vynerio procesai.

Kintamas prekybos aktyvumas trijų būsenų modelyje

Disertacijos 6.3.3 skyriuje kintamas prekybos aktyvumas yra apibrėžiamas trijų būsenų modelyje.

Trijų būsenų modelio atveju į $\tau(\cdot)$ formą galima papildomai įtraukti nuotaikos svyravimus:

$$\tau(x_f, \xi) = \frac{1}{1 + \left| \frac{1-x_f}{x_f} \xi \right|^\alpha} = \frac{1}{1 + |p|^\alpha}. \quad (36)$$

Atsižvelgus į kintamą prekybos aktyvumą ir įvedus bedimensį laiką, $t_s = h_1 t$, ir bedimensius parametrus, $\varepsilon_{cf} = \frac{\sigma_{cf}}{h_1}$, $\varepsilon_{fc} = \frac{\sigma_{fc}}{h_1}$, $\varepsilon_{cc} = \frac{\sigma_{cc}}{Hh_1}$, užrašoma galutinė trijų būsenų modelio stochastinių lygčių sistema:

$$d x_f = \left[\frac{(1 - x_f)\varepsilon_{cf}}{\tau(x_f, \xi)} - x_f\varepsilon_{fc} \right] dt_s + \sqrt{\frac{2x_f(1 - x_f)}{\tau(x_f, \xi)}} d W_{s,1}, \quad (37)$$

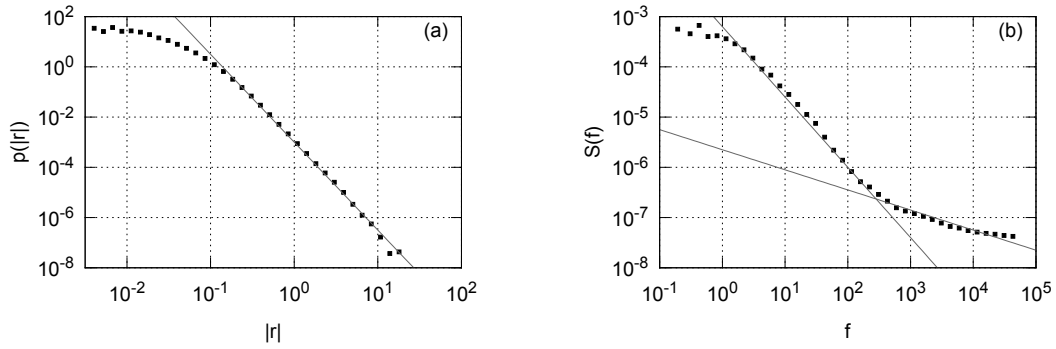
$$d \xi = -\frac{2\xi H \varepsilon_{cc}}{\tau(x_f, \xi)} dt_s + \sqrt{\frac{2H(1 - \xi^2)}{\tau(x_f, \xi)}} d W_{s,2}, \quad (38)$$

Skaitmeniškai sprendžiant šią lygčių sistemą, gaunamos absoliučios grąžos laiko eilutės pasižymi „perlūžusiu“ spektriniu tankiu (žr. 18 pav.). Gaunamo spektrinio tankio laipsnio rodikliai β_1 ir β_2 yra didesni nei empirinėse absoliučios grąžos laiko eilutėse.

2.6.4 Išorinio triukšmo įtraukimas

Disertacijos 6.4 skyriuje yra aprašomas išorinio triukšmo įtraukimas į trijų būsenų modelį ir tai darant suformuluojamas jungtinis trijų būsenų modelis.

Triukšmas į trijų būsenų modelį įtraukiamas remiantis idėja, naudojama ARCH šeimos modeliuose. Galima laikyti, kad trijų būsenų modelio dinamika nusako, kaip kinta stebimos



18 pav. Absoliučios grąžos laiko eilučių, gautų sprendžiant trijų būsenų modelio stochastines lygtis, tikimybės tankio funkcija (a) ir spektrinis tankis (b). Parinkti lygčių parametrai: $\varepsilon_{cf} = \varepsilon_{fc} = \varepsilon_{cc} = 3$, $H = 100$, $r_0 = 1$, $\alpha = 2$. Pilkos kreivės yra laipsninės aproksimacijos su šiais laipsnio rodikliais: (a) $\lambda = 3.5$, (b) $\beta_1 = 1.4$ ir $\beta_2 = 0.4$

grąžos variacija, o triukšmas atspindi momentinius grąžos svyravimus. Grąža laiko intervale T , jungtiniame trijų būsenų modelyje, yra apibūdinama taip:

$$r_T(t) = b(t) [1 + a|p(t)|] \zeta_q, \quad (39)$$

čia ζ_q yra q -Gauso triukšmas (nulinis vidurkis ir vienetinis standartinis nuokrypis), o parametras a leidžia suderinti trijų būsenų dinamikos įtaką stebimai grąžai. Čia parametras b nėra būtinas, nes grąžos laiko eilutės vis tiek yra normuojamos, bet šis parametras yra naudingas įtraukiant dienos sezoniškumo įtaką.

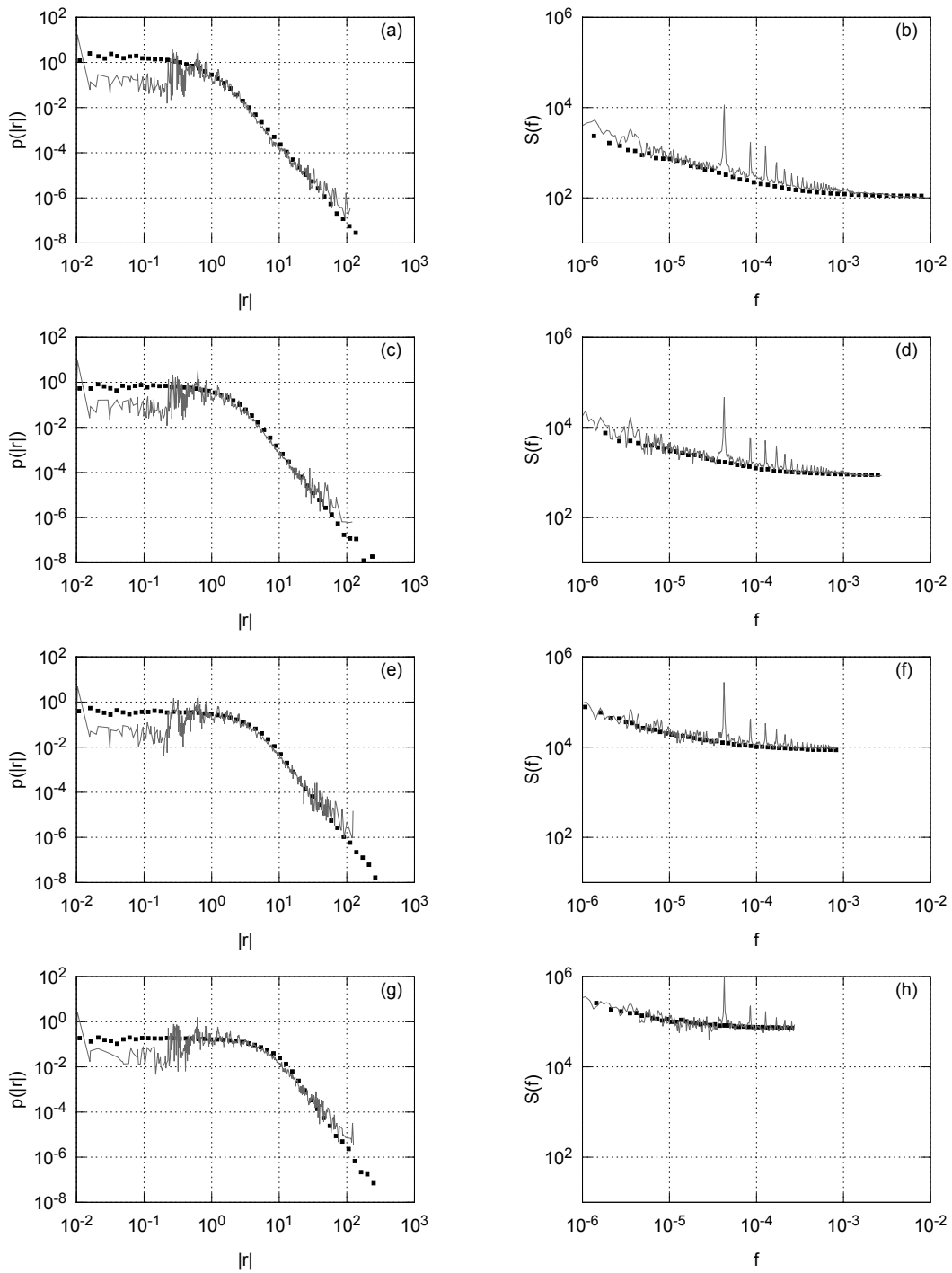
19, 20 ir 21 pav. pateiktas trijų skirtingų vertybinių popierių biržų absoliučios grąžos laiko eilučių statistinių savybių ir statistinių savybių, stebimų laiko eilutėse, gaunamose iš jungtinio modelio, palyginimas.

2.6.5 Dienos sezoniškumo įtraukimas

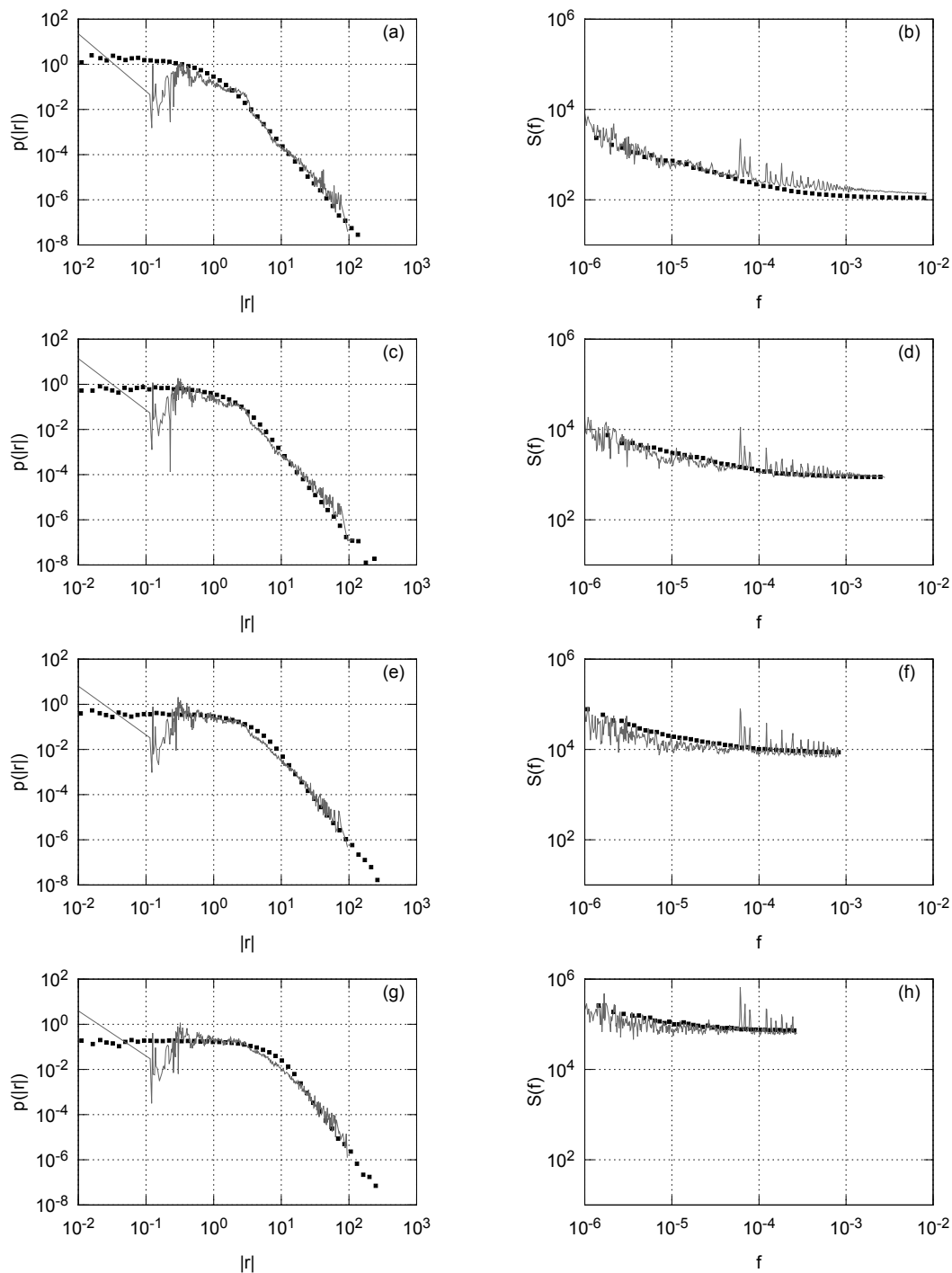
Disertacijos 6.5 skyriuje jungtinis modelis yra papildomas dienos sezoniškumu. Tai yra padaroma $b(t)$ suteikus tokį pavidalą:

$$b(t) = \exp \left[-\frac{(\{t \bmod 390\} - 195)^2}{400} \right] + 0.5, \quad (40)$$

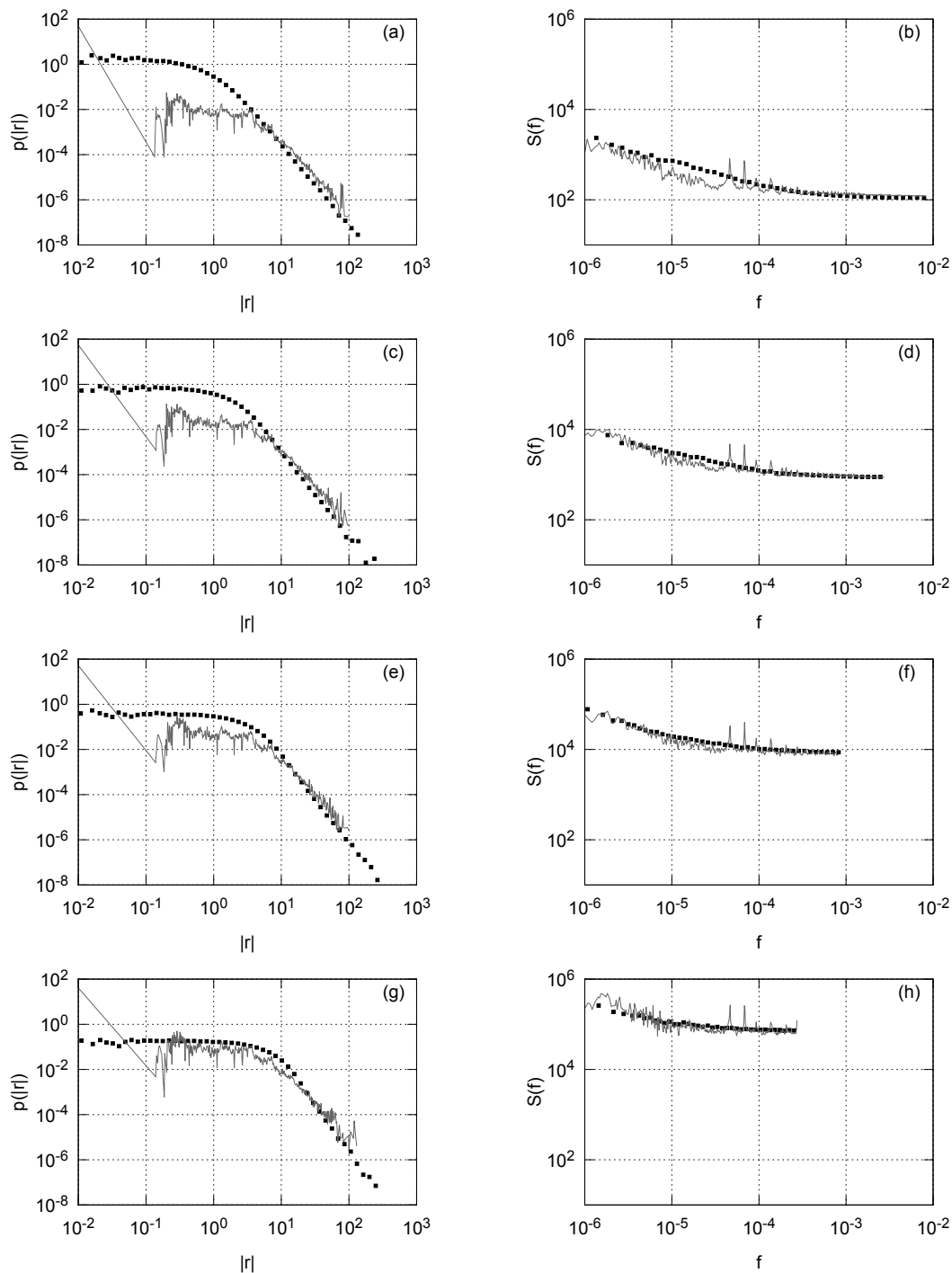
čia laikoma, kad laikas, t , yra matuojamas $1/390$ prekybos dienos dalimis. Toks papildymas leidžia atkurti dienos sezoniškumo rezonansus.



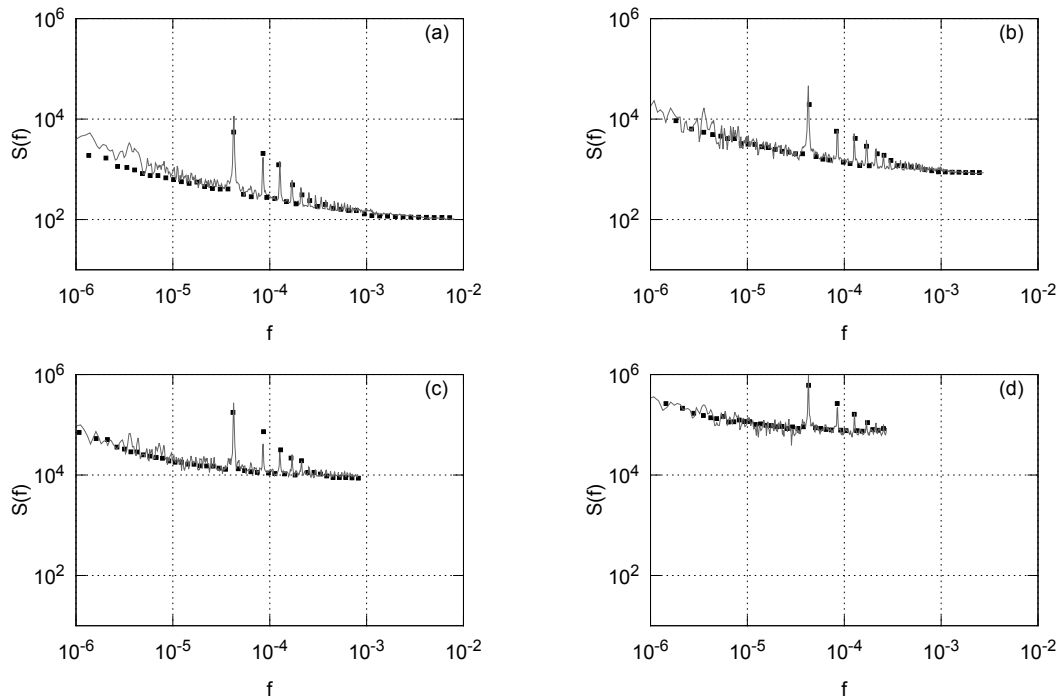
19 pav. Empirinių (pilkos kreivės) ir modeliųjų (juodi kvadratėliai) absoliučios grąžos laiko eilučių statistinių savybių, tikimybės tankio funkcijos ir spektrinio tankio palyginimas. (a) ir (b) pav. lyginamos 1 min absoliučios grąžos, (c) ir (d) – 3 min, (e) ir (f) – 10 min, (g) ir (h) – 30 min. Empirinių duomenų statistinės savybės įvertintos iš 4 Niujorko vertybinių popierių biržos akcijų, BMY, GM, MO ir T, prekybos duomenų. Modelio parametrai: $\varepsilon_{cf} = 0.1$, $\varepsilon_{fc} = 3$, $\varepsilon_{cc} = 3$, $H = 300$, $h = 10^{-8} s^{-1}$, $\alpha = 2$, $a = 0.5$, $\lambda = 5$ (q -Gauso triukšmas, $q = 1.4$)



20 pav. Empirinių (pilkos kreivės) ir modeliųjų (juodi kvadratėliai) absoliučios grąžos laiko eilučių statistinių savybių, tikimybės tankio funkcijos ir spektrinio tankio palyginimas. (a) ir (b) pav. lyginamos 1 min absoliučios grąžos, (c) ir (d) – 3 min, (e) ir (f) – 10 min, (g) ir (h) – 30 min. Empirinių duomenų statistinės savybės įvertintos iš 3 Varšuvos vertybinių popierių biržos akcijų, KGHM, PZU ir TPSA, prekybos duomenų. Modelio laiko eilučių kreivės tokios pat kaip 19 paveiksle



21 pav. Empirinių (pilkos kreivės) ir modeliųjų (juodi kvadratėliai) absoliučios grąžos laiko eilučių statistinių savybių, tikimybės tankio funkcijos ir spektrinio tankio palyginimas. (a) ir (b) pav. lyginamos 1 min absoliučios grąžos, (c) ir (d) – 3 min, (e) ir (f) – 10 min, (g) ir (h) – 30 min. Empirinių duomenų statistinės savybės įvertintos iš 5 Vilniaus vertybinių popierių biržos akcijų, APG1L, IVL1L, PTR1L, SAB1L ir TEO1L, prekybos duomenų. Modelio laiko eilučių kreivės tokios pat kaip 19 paveiksle



22 pav. Empirinių (pilkos kreivės) ir modelinių (juodi kvadratai) absoliučios grąžos laiko eilučių spektrinių tankių palyginimas. (a) pav. lyginamos 1 min absoliučios grąžos, (b) – 3 min, (c) – 10 min, (d) – 30 min. Empirinių duomenų spektrinis tankis įvertintas iš 4 Niujorko vertybinių popierių biržos akcijų, BMY, GM, MO ir T, prekybos duomenų. Modelio parametrai identiški naudotiems 19 pav., bet $b(t)$ buvo apibrėžtas pagal (40) formulę

2.7 Finansinių svyravimų valdymas naudojantis bandos jausmo sąveikomis

Septintame disertacijos skyriuje yra aptariamos galimybės valdyti socialines ir ekonomines sistemas, naudojantis bandos jausmo sąveikomis. Į ankstesniuose skyriuose aptartus modelius yra įterpiami agentai (vadinami valdomais agentais), kurių būseną nepriklauso nuo sąveikų su kitais agentais, ir nagrinėjama jų įtaka sistemų dinamikai. Šiame skyriuje pristatomi rezultatai buvo publikuoti [A1, A5] darbuose.

2.7.1 Dviejų būsenų modelio valdymas

Disertacijos 7.1 skyriuje atliekama valdymo galimybių analizė pradedant nuo dviejų būsenų modelio. Jeigu valdomi agentai šiame modelyje sąveikauja globaliomis sąveikomis, tai mažas baigtinis valdomų agentų skaičius turi nemažą poveikį netgi begaliniam agentų skaičiui. Matematiškai jų poveikis yra ekvivalentus atitinkamos būsenos σ_i parametro vertės padidinimui – $\tilde{\sigma}_i = \sigma_i + hM_i$ (čia M_i yra valdomų agentų, patalpintų į i -tąją būseną, skaičius). Šis poveikis pasireiškia eksponentiškai greitai.

2.7.2 Trijų būsenų modelio valdymas

Disertacijos 7.2 skyriuje valdomi agentai yra įterpiami į trijų būsenų finansų rinkų modelį.

Pirmiausia išbandoma akivaizdžiausia finansinių svyravimų suvaldymo strategija – į modeliuojamą rinką įterpiami valdomi fundamentalistai. Tai padaro teigiamą efektą – logaritminės kainos svyravimai yra efektyviai sumažinami. Tačiau šią strategiją įgyvendinti realybėje būtų sunku, nes tikslus fundamentalios vertės nustatymas yra gana problemiškas atviras klausimas.

Taip pat išbandoma atsitiktinai prekiaujančių valdomų agentų strategija. Šiuo atveju valdomi agentai pasirenka tarp pirkimo ir pardavimo veiksmų. Įprasti agentai, sudarydami sandorius, mato, kad agentų, besielgiančių priešingai nei jie, skaičius yra padidėjęs, todėl įprasti agentai darosi labiau linkę pakeisti savo būseną (prekybos strategiją). Dėl tokio polinkio atvejais, kai dauguma agentų pasirenką tą pačią būseną, tampa retesni, o dalis šių atvejų atitinka didelius svyravimus, todėl atitinkamai dideli svyravimai tampa mažiau tikėtini. Skaitmeninis modeliavimas rodo, kad ši finansinių svyravimų suvaldymo strategija yra mažiau efektyvi nei fundamentalistų įterpimas, tačiau realybėje ją įgyvendinti turėtų būti paprasčiau.

3 Išvados

1. Empirinė vienos minutės absoliučios gražos laiko eilučių burbulų statistika yra laipsninio pobūdžio. Statistiškai panašūs laipsniniai sąryšiai stebimi ir modelinėse laiko eilutėse, gautose sprendžiant (3) lygtį ir naudojant dvigubą stochastinį modelį.
2. Netiesines stochastines lygtis, kurių laiko eilutės pasižymi laipsniniu skirstiniu ir laipsniniu spektriniu tankiu, gavome iš GARCH(1,1) modelio, papildę jį netiesiškumu.
3. Netiesines stochastines lygtis, kurių laiko eilutės pasižymi laipsniniu skirstiniu ir laipsniniu spektriniu tankiu ir kurios aprašo ilgalaikį gražos kitimą, gavome iš agentų bandos jausmo modelio, papildyto grįžtamuoju sąryšiu, didinančiu sąveikų intensyvumą.
4. Aprašę finansų rinkų kintamumą trijų būsenų agentų modeliu, gavome absoliučios gražos laiko eilutes, kurios pasižymi skirstiniu ir spektriniu tankiu, būdingu finansų rinkoms.
5. Į bandos jausmo agentų modelius įterpus valdomus agentus galima pasiekti, kad baigtinis valdomų agentų skaičius darytų nemažą poveikį begalinėms sistemoms. Čia esminis reikalavimas, kad valdomi agentai su įprastais agentais sąveikautų globaliai.

Literatūra

1. G. Akerlof, J. Shiller, *Animal Spirits: How Human Psychology Drives the Economy, and Why It Matters for Global Capitalism* (Princeton University Press, 2009).
2. J. Fox, *The Myth of the Rational Market* (HarperBusiness, 2011).
3. R. Shiller, *Finance and the Good Society* (Princeton University Press, Princeton, USA, 2012).
4. G. S. Becker, A note on restaurant pricing and other examples of social influence on price, *Journal of Political Economy* **99**, 1109–1116 (1991).
5. J. M. Pasteels, J. L. Deneubourg, S. Goss, Self-organization mechanisms in ant societies (I): Trail recruitment to newly discovered food sources, in J. M. Pasteels, J. L. Deneubourg (eds.), *From Individual to Collective Behaviour in Social Insects* (Birkhauser, Basel, 1987), 155–175.
6. J. M. Pasteels, J. L. Deneubourg, S. Goss, Self-organization mechanisms in ant societies (II): Learning in foraging and division of labor, in J. M. Pasteels, J. L. Deneubourg (eds.), *From Individual to Collective Behaviour in Social Insects* (Birkhauser, Basel, 1987), 177–196.
7. C. Detrain, J. L. Deneubourg, Self-organized structures in a superorganism: Do ants behave like molecules?, *Physics of Life Reviews* **3**, 162–187 (2006).
8. J. Krause, A. F. T. Winfield, J. L. Deneubourg, Interactive robots in experimental biology, *Trends in Ecology and Evolution* **26**, 369–375 (2011).
9. K. Durkin, Peer pressure, in A. S. R. Manstead, M. Hewstone (eds.), *The Blackwell Encyclopedia of Social Psychology* (Wiley–Blackwell, 1996).
10. P. Ball, The physical modelling of society: A historical perspective, *Physica A* **314**, 1–14 (2002).
11. J. Stachel (ed.), *The Collected Papers of Albert Einstein*, volume 2 (Princeton University Press, 1989).
12. S. Chandrasekhar, Marian Smoluchowski as the founder of the physics of stochastic phenomena, in *Selected Papers* (University of Chicago Press, 1989), volume 3.
13. P. H. Cootner, *The Random Character of Stock Market Prices* (MIT Press, 1964).

14. J. P. Sethna, *Statistical Mechanics: Entropy, Order Parameters and Complexity* (Clarendon Press, Oxford, 2009).
15. H. E. Hurst, Long-term storage capacity of reservoirs, *Transactions of the American Society of Civil Engineers* **116**, 770–799 (1951).
16. E. N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, 130–141 (1963).
17. J. Persky, Retrospectives: The ethology of homo economicus, *The Journal of Economic Perspectives* **9**, 221–231 (1995).
18. J. Stodder, Strategic voting and coalitions: Condorcet’s paradox and Ben-Gurion’s trilemma, *International Review of Economics Education* **4**, 58–72 (2005).
19. W. B. Arthur, Inductive reasoning and bounded rationality, *American Economic Review* **84**, 406–411 (1994).
20. P. F. Drucker, *The End of Economic Man* (Transaction Publishers, Piscataway, New Jersey, 1995).
21. J. P. Bouchaud, Economics needs a scientific revolution, *Nature* **455**, 1181 (2008).
22. J. P. Bouchaud, The (unfortunate) complexity of the economy, *Physics World* **22**, 28–32 (2009).
23. J. D. Farmer, M. Gallegati, C. Hommes, A. Kirman, P. Ormerod, S. Cincotti, A. Sanchez, D. Helbing, A complex systems approach to constructing better models for managing financial markets and the economy, *European Physics Journal Special Topics* **214**, 295–324 (2012).
24. R. H. Nelson, *Economics as Religion: From Samuelson to Chicago and Beyond* (University Park: Pennsylvania State University Press, 2001).
25. M. O. Jackson, K. Leyton-Brown, Y. Shoham, Game theory I & II, MOOCs at Coursera (2014).
26. T. Kretschmer, Competitive strategy, MOOC at Coursera (2014).
27. C. Hommes, Experimental economics, behavioral economics and heterogeneity of economic and social actors, talk given at *International School on Multidisciplinary Approaches to Economic and Social Complex System* (2010).

28. A. Kirman, *Complex Economics: Individual and Collective Rationality* (Routledge, 2010).
29. R. Conte, N. Gilbert, G. Bonelli, C. Cioffi-Revilla, G. Deffuant, J. Kertesz, V. Loreto, S. Moat, J. P. Nadal, A. Sanchez, A. Nowak, A. Flache, M. San Miguel, D. Helbing, Manifesto of computational social science, *European Physics Journal Special Topics* **214**, 325–346 (2012).
30. S. Havlin, D. Y. Kenett, E. Ben-Jacob, A. Bunde, R. Cohen, H. Hermann, J. W. Kantelhardt, J. Kertesz, S. Kirkpatrick, J. Kurths, J. Portugali, S. Solomon, Challenges in network science: Applications to infrastructures, climate, social systems and economics, *European Physics Journal Special Topics* **214**, 273–293 (2012).
31. D. Helbing, Introduction: The FuturICT knowledge accelerator towards a more resilient and sustainable future, *European Physics Journal Special Topics* **214**, 5–9 (2012).
32. M. San Miguel, J. H. Johnson, J. Kertesz, K. Kaski, A. Diaz-Guilera, R. S. MacKay, V. Loreto, P. Erdi, D. Helbing, Challenges in complex systems science, *European Physics Journal Special Topics* **214**, 245–271 (2012).
33. V. Pareto, *Manual of Political Economy (Manuale di Economia Politica)* (Kelley, New York, 1971), translated by A. S. Schwier and A. N. Page.
34. N. Bunkley, Joseph Juran, 103, pioneer in quality control, dies, *New York Times* (2008).
35. P. Levy, *Calcul des Probabilites* (Gauthier–Villars, Paris, 1925).
36. H. E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford University Press, 1971).
37. B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (W. H. Freeman, San Francisco, 1982).
38. P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld, Self-organized criticality, *Physical Review Letters* **59**, 381–384 (1987).
39. A. L. Barabasi, M. Newman, D. J. Watts, *The Structure and Dynamics of Networks* (Princeton University Press, 2006).
40. A. Chakraborti, I. M. Toke, M. Patriarca, F. Abergel, Econophysics review: I. Empirical facts, *Quantitative Finance* **7**, 991–1012 (2011).
41. X. Gabaix, P. Gopikrishnan, V. Plerou, H. E. Stanley, A theory of power law distributions in financial market fluctuations, *Nature* **423**, 267–270 (2003).

42. T. Lux, M. Ausloos, Market fluctuations I: Scaling, multi-scaling and their possible origins, in A. Bunde, J. Kropp, H. Schellnhuber (eds.), *The Science of Disasters: Climate Disruptions, Heart Attacks, and Market Crashes* (Springer, 2002), 372–409.
43. M. Karsai, K. Kaski, A. L. Barabasi, J. Kertesz, Universal features of correlated bursty behaviour, *NIH Scientific Reports* **2**, 397 (2012).
44. D. R. Parisi, D. Sornette, D. Helbing, Financial price dynamics and pedestrian counterflows: A comparison of statistical stylized facts, *Physical Review E* **87**, 012804 (2013).
45. B. Podobnik, D. Horvatic, A. Petersen, H. Stanley, Cross-correlations between volume change and price change, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **106**, 22079–22084 (2009).
46. R. Rak, S. Drozd, J. Kwapien, P. Oswiecimka, Stock returns versus trading volume: Is the correspondence more general?, *Acta Physica Polonica B* **44**, 2035–2050 (2013).
47. J. Shao, P. C. Ivanov, B. Urošević, H. E. Stanley, B. Podobnik, Zipf rank approach and cross-country convergence of incomes, *EPL* **94**, 48001 (2011).
48. K. Yamasaki, L. Muchnik, S. Havlin, A. Bunde, H. Stanley, Scaling and memory in volatility return intervals in financial markets, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **102**, 9424–9428 (2005).
49. R. Axelrod, Advancing the art of simulation in the social sciences, *Complexity* **3**, 16–32 (1997).
50. A. Chakraborti, I. M. Toke, M. Patriarca, F. Abergel, Econophysics review: II. Agent-based models, *Quantitative Finance* **7**, 1013–1041 (2011).
51. M. Cristelli, L. Pietronero, A. Zaccaria, Critical overview of agent-based models for economics, in F. Mallone, H. E. Stanley (eds.), *Proceedings of the School of Physics "E. Fermi", Course CLXXVI* (SIF-IOS, Bologna–Amsterdam, 2012), 235–282.
52. M. S. Pakkanen, Microfoundations for diffusion price processes, *Mathematics and financial economics* **3**, 89–114 (2010).
53. L. Feng, B. Li, B. Podobnik, T. Preis, H. E. Stanley, Linking agent-based models and stochastic models of financial markets, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* **22**, 8388–8393 (2012).

54. S. M. Krause, P. Bottcher, S. Bornholdt, Mean-field-like behavior of the generalized voter-model-class kinetic ising model, *Physical Review E* **85**, 031126 (2012).
55. A. P. Kirman, Ants, rationality and recruitment, *Quarterly Journal of Economics* **108**, 137–156 (1993).
56. S. Alfarano, T. Lux, F. Wagner, Estimation of agent-based models: The case of an asymmetric herding model, *Computational Economics* **26**, 19–49 (2005).
57. S. Alfarano, T. Lux, F. Wagner, Time variation of higher moments in a financial market with heterogeneous agents: An analytical approach, *Journal of Economic Dynamics and Control* **32**, 101–136 (2008).
58. V. Alfi, M. Cristelli, L. Pietronero, A. Zaccaria, Minimal agent based model for financial markets I: Origin and self-organization of stylized facts, *European Physical Journal B* **67**, 385–397 (2009).
59. V. Alfi, M. Cristelli, L. Pietronero, A. Zaccaria, Minimal agent based model for financial markets II: Statistical properties of the linear and multiplicative dynamics, *European Physical Journal B* **67**, 399–417 (2009).
60. B. Kaulakys, J. Ruseckas, Stochastic nonlinear differential equation generating $1/f$ noise, *Physical Review E* **70**, 020101 (2004).
61. V. Gontis, B. Kaulakys, Modeling financial markets by the multiplicative sequence of trades, *Physica A* **344**, 128–133 (2004).
62. B. Kaulakys, V. Gontis, M. Alaburda, Point process model of $1/f$ noise vs a sum of Lorentzians, *Physical Review E* **71**, 1–11 (2005).
63. B. Kaulakys, J. Ruseckas, V. Gontis, M. Alaburda, Nonlinear stochastic models of $1/f$ noise and power-law distributions, *Physica A* **365**, 217–221 (2006).
64. B. Kaulakys, M. Alaburda, Modeling scaled processes and $1/f^\beta$ noise using non-linear stochastic differential equations, *Journal of Statistical Mechanics* P02051 (2009).
65. A. E. Biondo, A. Pluchino, A. Rapisarda, D. Helbing, Stopping financial avalanches by random trading, *Physical Review E* **88**, 062814 (2013).
66. F. Schweitzer, P. Mavrodiev, C. J. Tessone, How can social herding enhance cooperation?, *Advances in Complex Systems* **16**, 1350017 (2013).

67. J. R. G. Dyer, A. Johansson, D. Helbing, I. D. Couzin, J. Krause, Leadership, consensus decision making and collective behaviour in humans, *Philosophical Transactions of the Royal Society B* **364**, 781–789 (2009).
68. P. E. Kloeden, E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* (Springer, Berlin, 1999).
69. V. Mackevicius, *Stochastic Analysis* (Vilnius University Press, 2005).
70. H. Risken, *The Fokker–Planck Equation: Methods of Solutions and Applications* (Springer, 1996), 3 edition.
71. C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods* (Springer, Berlin, 2009).
72. J. Ruseckas, B. Kaulakys, Scaling properties of signals as origin of $1/f$ noise, *Journal of Statistical Mechanics* **2014**, P06004 (2014).
73. S. Redner, *A guide to first-passage processes* (Cambridge University Press, 2001).
74. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion* (Birkhauser, Basel, Switzerland, 2002), 2 edition.
75. M. Jeanblanc, M. Yor, M. Chesney, *Mathematical Methods for Financial Markets* (Springer, Berlin, 2009).
76. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (Dover, New York, 1972).
77. R. Engle, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica* **50**, 987–1008 (1982).
78. T. Bollerslev, Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* **31**, 307–327 (1986).
79. R. Engle, T. Bollerslev, Modeling the persistence of conditional variances, *Econometric Reviews* **5**, 1–50 (1986).
80. D. B. Nelson, ARCH models as diffusion approximations, *Journal of Econometrics* **45**, 7–38 (1990).
81. A. M. Lindner, Continuous time approximations to GARCH and stochastic volatility models, in *Handbook of Financial Time Series* (Springer, 2008).

82. M. L. Higgins, A. K. Bera, A class of nonlinear ARCH models, *International Economic Review* **33**, 137–158 (1992).
83. N. G. van Kampen, *Stochastic Process in Physics and Chemistry* (North Holland, Amsterdam, 2007).
84. S. Alfarano, M. Milakovic, Network structure and N-dependence in agent-based herding models, *Journal of Economic Dynamics and Control* **33**, 78–92 (2009).
85. P. Holme, B. J. Kim, Growing scale-free networks with tunable clustering, *Physical Review E* **65**, 026107 (2002).
86. M. O. Jackson, B. W. Rogers, Meeting strangers and friends of friends: How random are social networks?, *American Economic Review* **97**, 890–915 (2007).
87. J. Leskovec, J. Kleinberg, C. Faloutsos, Graph evolution: Densification and shrinking diameters, *Transactions on Knowledge Discovery from Data* **1**, 1217301 (2007).
88. M. Balint, V. Posea, A. Dimitriu, A. Iosup, An analysis of social gaming networks in online and face to face bridge communities, in *Proceedings of the Third International Workshop on Large-scale System and Application Performance* (New York, USA, 2011), 35–42.
89. P. Moriano, J. Finke, On the formation of structure in growing networks, *Journal of Statistical Mechanics* **2013**, P06010 (2013).
90. C. M. Gell-Mann, C. Tsallis, *Nonextensive Entropy – Interdisciplinary Applications* (Oxford University Press, New York, 2004).
91. L. Walras, *Elements of Pure Economics* (Routledge, 2013).

Summary

Almost 150 years ago works of Maxwell and Boltzmann became a foundation of the statistical physics. These works contained an idea, which originated in social sciences, that the trajectories of single particles are not important as important as statistical description of their collisions. Since then statistical physics has solved classical problems and embraced new concepts of open, complex and nonlinear systems, while social sciences still struggle with fundamental issues of modeling human behavior. This dissertation is based on the idea that human behavior is complex in a similar sense as some physical systems are and thus physical thought might applicable in modeling social and economical systems.

In this dissertation we have analyzed bursting behavior observed in the empirical absolute return time series as well as in the numerical time series. Numerical time series were obtained by solving stochastic differential equation, reproducing power-law distribution and spectral density, and also by evaluating double stochastic model. We have found that similar statistical properties, burst duration distribution as well as scaling of geometrical properties, are observed in the considered cases.

In this dissertation we have examined the possible relation between a general class of stochastic differential equations, reproducing power-law distribution and spectral density, and models form ARCH framework. We have proposed a nonlinear modification of GARCH(1,1) model, using which we were able to generate volatility time series with $1/f$ noise – obtaining a characteristic feature of long-range memory in memory-less model.

In this dissertation we have started from a simple two state agent-based herding behavior model. We have examined, in terms of network theory, implications of interactions topologies in case of this model. The interaction topologies were generated using novel network formation model, which allows to continuously transition between local and global scales of interactions. We have observed that as the interaction topologies allow more global interactions, the non-extensive statistics, power-law distributions, emerge.

We have further generalized original two state herding model to include variable agent interaction rates. In context of the financial markets this roughly corresponds to the variability of trading activity. We have related the two generic states of the original model to two types of behavior in the financial market: rational (fundamental trading) and irrational (chartist, noise trading). This makes up the basis of the minimal model of the financial markets. Treating this model in terms of birth-death process formalism allows to derive stochastic differential equations describing dynamics of its observables, such as state occupation (e.g., fraction of chartists), price and return. Considering two state dynamics, chartists-fundamentalists, al-

lows to derive stochastic differential equation for the long-term variation of return, so-called modulating return. The obtained equation belongs to the general class of stochastic differential equations. Thus this minimal financial market model may be seen to provide agent-based reasoning to the general class of stochastic differential equations.

We have extended minimal financial market model, describing long-term dynamics, by splitting chartist state into two states: optimists and pessimists. This defines a three state model, where transitions occur on two distinct time scales. Treating three state model using birth-death process formalism allows to obtain a set of two stochastic differential equations, which fully describe the dynamics of price and return. Absolute return time series, obtained from the three state model, exhibit double power-law, with two characteristic exponents, spectral density. Although the values of exponents are larger than those observed from the empirical data.

Based on the three state model we propose a consentaneous model, which includes three state model, assumed to describe market volatility, as well as exogenous noise, assumed to describe instantaneous fluctuations. The consentaneous model is able to generate absolute return time series with distribution and spectral densities similar to the ones observed in the empirical data from very different markets: New York, Vilnius and Warsaw stock exchanges.

In this dissertation we have analyzed the extreme event prevention opportunities arising from the proposed models. We have discussed introduction of the random trading into the three state financial market model and confirmed that this should be a viable extreme event prevention strategy.

The research presented in this dissertation was published in 15 papers. 9 papers were published in ISI indexed journals, 1 paper was published in ISI indexed conference proceedings, 4 papers were published in other international peer-reviewed journals and 1 paper was published as a chapter in an open-access book. 33 conference presentations were made based on the research covered in this dissertation.

Trumpos žinios apie disertacijos autorių

Bendrieji duomenys

Vardas, pavardė: Aleksejus Kononovičius
Gimimo data: 1986-11-18
Gimimo vieta: Vilniaus m.
Asmeninė svetainė: <http://kononovicius.lt>
Elektroninis paštas: aleksejus.kononovicius@tfai.vu.lt

Išsilavinimas

2011–2015 metais Doktorantūros studijos Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.
2009–2011 metais Fizikos magistro laipsnis įgytas, Vilniaus universitete, Fizikos fakultete (studijų programa – teorinė fizika ir astronomija).
2005–2009 metais Fizikos bakalauro laipsnis įgytas, Vilniaus universitete, Fizikos fakultete (studijų programa – kompiuterinė fizika).

Darbo patirtis

Nuo 2012 metų jaunesnysis mokslo darbuotojas Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.
2013 metų vasara Lietuvos mokslo tarybos organizuotos studentų mokslinės praktikos vadovas.
2009–2012 metai inžinierius Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute.
2009–2011 metais Projekto „Mokslas verslui ir visuomenei“ vykdytojas. Rašyti mokslo populiarinimo straipsniai ir kurtos interaktyvios programėlės „Rizikos fizikos“ svetainei.
2007 metų vasara Lietuvos mokslo tarybos organizuotos studentų mokslinės praktikos dalyvis. Praktika atlikta Vilniaus universitete, Teorinės fizikos ir astronomijos institute, (vadovas dr. (HP) Vygintas Gontis).
2006–2008 metais Projekto „Mokslas. Mokslininkai. Visuomenė.“ vykdytojas. Rašyti mokslo populiarinamieji straipsniai ir kurtos interaktyvios programėlės „Rizikos fizikos“ svetainei.

Kita patirtis

2015 metais	„Laisvųjų skaitymų“ programos komiteto narys.
2013 metais	„Cafe Scientifique“ pranešėjas (organizavo Vilniaus universiteto Fizinės fakulteto Studentų mokslinė draugija).
2013 metais	„Mokslo sriubos“, konstanta.lt ir technologijos.lt organizuoto mokslo populiarinimo darbų konkurso mokslininkų komisijos prizo laimėtojas.
2009 metais	NASDAQ OMX Vilnius geriausio studentų mokslinio baigiamojo darbo konkurso finalininkas.

Disertacijos autoriaus mokslinių darbų sąrašas

Mokslinės publikacijos

Šioje disertacijoje aprašomi tyrimai buvo paskelbti 15 straipsnių. 9 darbai publikuoti *ISI Web of Science* indeksuojamuose žurnaluose [A1–A5, A7, A9, A10, A15]. [A6] darbas buvo publikuotas ISI indeksuojamame konferencijos darbų rinkinyje. [A8, A11–A13] darbai buvo paskelbti kituose tarptautiniuose recenzuojamuose žurnaluose. [A14] darbas buvo publikuotas kaip skyrius atviros prieigos (angl. *open access*) knygoje. Toliau pateikiamas publikacijų sąrašas chronologine tvarka (nuo naujausių).

- A1. **A. Kononovicius**, V. Gontis, Herding interactions as an opportunity to prevent extreme events in financial markets, *European Physical Journal B* **88**, 189 (2015).
- A2. **A. Kononovicius**, J. Ruseckas, Nonlinear GARCH model and $1/f$ noise, *Physica A* **427**, 74–81 (2015).
- A3. **A. Kononovicius**, J. Ruseckas, Continuous transition from the extensive to the non-extensive statistics in an agent-based herding model, *European Physical Journal B* **87**, 169 (2014).
- A4. V. Gontis, **A. Kononovicius**, Consentaneous agent-based and stochastic model of the financial markets, *PLoS ONE* **9**, e102201 (2014).
- A5. **A. Kononovicius**, V. Gontis, Control of the socio-economic systems using herding interactions, *Physica A* **405**, 80–84 (2014).
- A6. V. Gontis, **A. Kononovicius**, Fluctuation analysis of the three agent groups herding model, in *Noise and Fluctuations (ICNF), 2013 22nd International Conference on* (Montpeiler, France, 2013), 1–4.
- A7. **A. Kononovicius**, V. Gontis, Three state herding model of the financial markets, *EPL* **101**, 28001 (2013).
- A8. **A. Kononovicius**, V. Daniunas, Agent-based and macroscopic modeling of the complex socio-economic systems, *Social Technologies* **3**, 85–103 (2013).
- A9. **A. Kononovicius**, V. Gontis, Agent based reasoning for the non-linear stochastic models of long-range memory, *Physica A* **391**, 1309–1314 (2012).

- A10. V. Gontis, **A. Kononovicius**, S. Reimann, The class of nonlinear stochastic models as a background for the bursty behavior in financial markets, *Advances in Complex Systems* **15**, 1250071 (2012).
- A11. **A. Kononovicius**, V. Gontis, V. Daniunas, Agent-based versus macroscopic modeling of competition and business processes in economics and finance, *International Journal On Advances in Intelligent Systems* **5**, 111–126 (2012).
- A12. V. Daniunas, V. Gontis, **A. Kononovicius**, Agent-based versus macroscopic modeling of competition and business processes in economics, in *ICCGI 2011, The Sixth International Multi-Conference on Computing in the Global Information Technology* (Luxembourg, 2011), 84–88, received IARIA Best Paper Award (see <http://www.iaria.org/conferences2011/AwardsICCGI11.html>).
- A13. V. Gontis, **A. Kononovicius**, Nonlinear stochastic model of return matching to the data of New York and Vilnius Stock Exchanges, *Dynamics of Socio-Economic Systems* **2**, 101–109 (2011).
- A14. V. Gontis, J. Ruseckas, **A. Kononovicius**, A non-linear stochastic model of return in financial markets, in C. Myers (ed.), *Stochastic Control* (InTech, 2010).
- A15. V. Gontis, J. Ruseckas, **A. Kononovicius**, A long-range memory stochastic model of the return in financial markets, *Physica A* **389**, 100–106 (2010).

Pranešimai konferencijose ir konferencijų tezės

Šioje disertacijoje aprašomi tyrimai buvo pristatyti 33 pranešimuose mokslinėse konferencijose. Iš jų 12 žodinių ir 10 stendinių pranešimų pristatė disertacijos autorius. Likusių 11 pranešimų – tezių bendraautoris. Toliau pateikiamas pranešimų sąrašas chronologine tvarka (nuo naujausių). Prie kiekvieno pranešimo yra nurodytas pranešėjas ir pranešimo tipas.

- C1. A. Kononovicius, V. Gontis, Pikų statistika minučių, dienų ir mėnesių laiko skalėse, in *41-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija: Programa ir pranešimų tezės* (Vilnius, Lietuva, 2015), 355. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C2. A. Kononovicius, J. Ruseckas, Long-range memory in non-linear GARCH(1,1) models, in *Open Readings 2015* (Vilnius, Lithuania, 2015), 247. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas

- C3. A. Kononovicius, V. Gontis, J. Ruseckas, Complexity and statistical physics of herding behavior, in *Naujametė fizikos konferencija* (Vilnius, Lithuania, 2015), 11. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C4. A. Kononovicius, V. Gontis, Controlling the dynamics of herding dominant financial market, in *International Conference on Statistical Physics* (Rhodes, Greece, 2014), 80. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C5. V. Gontis, A. Kononovicius, Financial herding of three agent groups under the impact of exogenous noise, in *International Conference on Statistical Physics* (Rhodes, Greece, 2014), 54–55. // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C6. A. Kononovicius, J. Ruseckas, Non-extensive and extensive statistics in the agent-based herding model, in *Open Readings 2014* (Vilnius, Lithuania, 2014), 52. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C7. A. Kononovicius, V. Gontis, Leadership phenomenon in the agent-based herding model, in *Open Readings 2014* (Vilnius, Lithuania, 2014), 201. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C8. A. Kononovicius, V. Gontis, Controlling the collective behavior in the agent-based herding model, in *Verhandlungen DPG (VI) 49* (Dresden, Germany, 2014), SOE 6.15. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C9. A. Kononovicius, V. Gontis, Sudėtingų socialinių vyksmų aiškinimas siejant jų mikroskopinius ir makroskopinius aprašymus, in *Fizinių ir technologijos mokslų tarpdalykiniai tyrimai (4-oji jaunųjų mokslininkų konferencija): Fizinių mokslų sekcija* (Lietuvos mokslų akademija, Vilnius, Lietuva, 2014), 11–13. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C10. A. Kononovicius, V. Gontis, Mikroskopinis ir makroskopinis sudėtingų sistemų modeliavimas, in *40-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija: Programa ir pranešimų tezės* (Vilnius, Lietuva, 2013), 28. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C11. A. Kononovicius, V. Gontis, Generalizing binary choice agent-based herding model, in *WEHIA 2013: Conference Program* (Reykjavik, Iceland, 2013), 8. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C12. A. Kononovicius, V. Daniunas, Agent-based and macroscopic modeling of the complex socio-economic systems, in *Social Transformations in Contemporary Society 2013* (Vilnius, Lithuania, 2013). // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas

- C13. A. Kononovicius, V. Gontis, Bursting behavior of the non-linear stochastic models applicable to the financial markets, in *Open Readings 2013* (Vilnius, Lithuania, 2013), 57. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C14. A. Kononovicius, V. Gontis, Inter-burst times of the empirical high-frequency financial market data and non-linear stochastic models, in *Verhandlungen DPG (VI) 48* (Regensburg, Germany, 2013). // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C15. V. Gontis, A. Kononovicius, The class of nonlinear stochastic equations as a background modeling financial systems, in *ETH Zurich Latsis Symposium 2012 Satellite Workshop* (ETH Zurich, Zurich, Switzerland, 2012), 37. // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C16. A. Kononovicius, V. Gontis, J. Ruseckas, B. Kaulakys, Bursting dynamics of the high-frequency empirical return and non-linear stochastic model, in *COST Action MP0801 Annual Meeting 2012* (Galway, Ireland, 2012), 31. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C17. V. Gontis, A. Kononovicius, B. Kaulakys, Agent-based versus macroscopic modeling of competition and business processes in economics and finance, in *COST Action MP0801 Annual Meeting 2012* (Galway, Ireland, 2012), 19. // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C18. A. Kononovicius, V. Gontis, B. Kaulakys, Herding behavior of agents as a background of financial fluctuations, in *25th European Conference on Operational Research* (Vilnius, Lithuania, 2012), 75. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C19. V. Gontis, A. Kononovicius, Agent-based versus macroscopic modeling of competition and business processes in economics and finance, in *Meeting of Workgroup 3 of COST Action MP0801* (Jerusalem, Izrael, 2012). // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C20. B. Kaulakys, V. Gontis, A. Kononovicius, J. Ruseckas, Microscopic herding model leading to long-range processes and 1/f noise with application to absolute return in financial markets, in *Verhandlungen DPG (VI) 47* (Berlin, Germany, 2012), 403. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C21. A. Kononovicius, V. Gontis, J. Ruseckas, B. Kaulakys, Bursting behavior of non-linear stochastic model and empirical high-frequency return, in *Verhandlungen DPG (VI) 47* (Berlin, Germany, 2012), 401. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C22. P. Purlis, A. Kononovicius, V. Gontis, Various ways of introducing herding behavior into the agent based models of complex systems, in *Open Readings 2012* (Vilnius, Lithuania, 2012), 150. // Stendinis P. Purlio pranešimas

- C23. B. Kaulakys, M. Alaburda, V. Gontis, A. Kononovicius, J. Ruseckas, Modeling by the nonlinear stochastic differential equation of the power-law distribution of extreme events in the financial systems, in *6th International Conference on Unsolved Problems on Noise* (Kolkata, India, 2012). // Žodinis B. Kaulakio pranešimas
- C24. A. Kononovicius, V. Gontis, B. Kaulakys, Agent based reasoning of the nonlinear stochastic models, in *Verhandlungen DPG (VI) 46* (Dresden, Germany, 2011), 502. // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C25. A. Kononovicius, V. Gontis, Mikroskopinis stochastinių modelių aiškinimas, in *39-oji Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija: Programa ir pranešimų tezės* (Vilnius, Lietuva, 2011), 34. // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C26. V. Gontis, A. Kononovicius, B. Kaulakys, Minimal agent based models as a microscopic reasoning of nonlinear stochastic models, in *3rd Annual Meeting COST Action MP0801: Physics of Competition and Conflicts* (Eindhoven, Holland, 2011). // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C27. A. Kononovicius, V. Gontis, Stochastic model of return matching to the data of financial markets with differing liquidity, in *Open Readings 2010* (Vilnius, Lithuania, 2010). // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C28. V. Gontis, J. Ruseckas, A. Kononovicius, M. Alaburda, B. Kaulakys, Nonextensive statistics with application to financial processes from nonlinear stochastic differential equations, in *Verhandlungen DPG Spring Meeting* (Regensburg, Germany, 2010). // Stendinis V. Gončio pranešimas
- C29. A. Kononovicius, V. Gontis, Empirical analysis of Vilnius stock exchange absolute return time series, in *2nd Annual Meeting COST Action MP0801: Physics of Competition and Conflicts* (Sunny Beach, Bulgaria, 2010). // Stendinis A. Kononovičiaus pranešimas
- C30. V. Gontis, B. Kaulakys, A. Kononovicius, Scaled nonlinear stochastic model of return versus empirical data, in *2nd Annual Meeting COST Action MP0801: Physics of Competition and Conflicts* (Sunny Beach, Bulgaria, 2010). // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C31. A. Kononovicius, V. Gontis, J. Ruseckas, Gražos statistinių savybių, stebimų finansų rinkoje, modeliavimas stochastiniu modeliu su ilga atmintimi, in *Laisvieji skaitymai 2009* (Vilnius, Lietuva, 2009). // Žodinis A. Kononovičiaus pranešimas

- C32. V. Gontis, J. Ruseckas, A. Kononovicius, Long range memory stochastic model of return in financial markets, in *Applications of Physics in Financial Analysis 7* (Tokyo, Japan, 2009). // Žodinis V. Gončio pranešimas
- C33. V. Gontis, J. Ruseckas, A. Kononovicius, Stochastic modeling of trading activity and volatility in financial markets, in *4th International Conference on News, Expectations and Trends in Statistical Physics* (Crete, Greece, 2008). // Žodinis V. Gončio pranešimas

Asmeninis disertacijos autoriaus indėlis

Disertacijos autorius atliko daugumą disertacijoje aprašytų analizinių išvedimų ir visus aprašytus skaitmeninius skaičiavimus. Disertacijos autorius iškėlė mintį išanalizuoti ekstremalių įvykių prevencijos galimybes siūlomuose agentų modeliuose [A1, A5, C4, C7].

Padėka

Visų pirma norėčiau padėkoti savo moksliniam vadovui dr. Vygintui Gončiui. Esu ypač dėkingas už jo sumanų vadovavimą, didelį palaikymą ir vertingas pamokas moksle ir gyvenime.

Esu labai dėkingas profesoriui Bronislovui Kaulakiui ir dr. Juliui Ruseckui už turinigas diskusijas ir naudingus patarimus. Už kūrybingą ir draugišką atmosferą taip pat norėčiau padėkoti kolegoms studentams, mokslininkams ir kitam Vilniaus universiteto personalui.

Esu dėkingas Lietuvos mokslo tarybai ir Vilniaus universiteto doktorantų mobilumo fondui už finansinę paramą.

Norėčiau padėkoti dr. Tomui Žalandauskui, fizikos mokytojui Stanislovui Vičiui ir informatikos mokytojai Danguolei Milkintienei už tai, kad mane nukreipė eiti dabartiniu keliu.

Taip pat esu dėkingas savo šeimai ir draugams už kantrybę, begalinį palaikymą ir meilę. Ypatingą padėką skiriu Linai Abaravičiūtei.