VILNIAUS UNIVERSITETO
TEORINĖS FIZIKOS IR ASTRONOMIJOS INSTITUTAS

Darius Jurčiukonis

SU(3) TOPOLOGINIŲ SOLITONŲ KANONINIS KVANTAVIMAS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, fizika (02 P), matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika (190 P)

Vilnius, 2008

Darbas atliktas 2003–2007 metais Vilniaus universiteto teorinės fizikos ir astronomijos institute.

Mokslinis vadovas:

prof. dr. Egidijus Norvaišas (Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Fizikos mokslo krypties taryboje
Pirmininkas:

prof. habil. dr. Bronislovas Kaulakys (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P).

Nariai:

habil. dr. Dalis Baltrūnas (Fizikos institutas, fiziniai mokslai, fizika — 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P),

prof. habil. dr. Gediminas Gaigalas (Vilniaus pedagoginis universitetas, fiziniai mokslai, fizika — 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P),

dr. Andrius Juodagalvis (Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institutas, fiziniai mokslai, fizika — 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P),

prof. habil. dr. Algirdas Petras Stabinis (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, optika – 200 P).

Oponentai:

prof. habil. dr. Gintautas Kamuntavičius (Vytauto Didžiojo universitetas, fiziniai mokslai, fizika — 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P),

doc. dr. Kęstutis Svirskas (Vilniaus pedagoginis universitetas, fiziniai mokslai, fizika – 02 P, matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika – 190 P).

Disertacija bus ginama viešame Fizikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2008 m. rugsėjo 26 d. 15 val. Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute, A. Goštauto g. 12, LT–01108 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2008 m. rugpjūčio 25 dieną.
Disertaciją galima peržiūrėti Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos instituto ir Vilniaus universiteto bibliotekose.

VILNIUS UNIVERSITY
INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS AND ASTRONOMY

Darius Jurčiukonis

CANONICAL QUANTIZATION OF SU(3) TOPOLOGICAL SOLITONS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, physics (02 P), mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics (190 P)

Vilnius, 2008

The dissertation has been accomplished in 2003–2007 at the Vilnius University Institute of Theoretical Physics and Astronomy, Vilnius, Lithuania.

Scientific supervisor:

Prof. Dr. Egidijus Norvaišas, (Vilnius University Institute of theoretical physics and astronomy, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P)

The Vilnius University Doctoral Dissertation Committee in Physics
Chairman:

Prof. Dr. Habil. Bronislovas Kaulakys (Vilnius university Institute of theoretical physics and astronomy, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P).

Members:

Dr. Habil. Dalis Baltrūnas (Physics institute, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P),

Prof. Dr. Habil. Gediminas Gaigalas (Vilnius Pedagogical University, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P),

Dr. Andrius Juodagalvis (Vilnius University Institute of theoretical physics and astronomy, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P),

Prof. Dr. Habil. Algirdas Petras Stabinis (Vilnius University, physical sciences, physics – 02 P, optics – 200 P).

Opponents:

Prof. Dr. Habil. Gintautas Kamuntavičius (Vytautas Magnus University, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P),

Doc. Dr. Kęstutis Svirskas (Vilnius Pedagogical University, physical sciences, physics – 02 P, mathematical and general theoretical physics, classical mechanics, quantum mechanics, relativity, gravitation, statistical physics, thermodynamics – 190 P).

The official defence of the dissertation will be held at 3 p.m. on September 26, 2008 at the Vilnius University Institute of Theoretical Physics and Astronomy, A. Goštauto st. 12, LT–01108 Vilnius, Lithuania.

The summary of the doctoral dissertation was distributed on August 25, 2008.

A copy of the doctoral dissertation is available for review at the libraries of the Vilnius University Institute of Theoretical Physics and Astronomy and Vilnius university.

Įvadas

Kvantinė chromodinamika gerai aprašo stipriai sąveikaujančias elementariąsias daleles, kai jų energijos yra didelės. Esant mažoms energijoms, deja, nepavyksta apskaičiuoti net ir gana paprastų fizikinių dydžių, todėl kaip alternatyva yra naudojami fenomenologiniai modeliai, kuriuos pritaikius šiuos skaičiavimus galima nesunkiai atlikti. Vienas iš tokių modelių, aprašantis barionus, yra anglų fiziko Skyrme'os pasiūlytas netiesinis topologinų solitonų modelis. Dar praėjusio amžiaus šeštame dešimtmetyje pasirodė jo darbai [1, 2], nagrinėjantys nukleonus kaip pioninio skysčio solitonus. Tačiau tuo laikotarpiu kvantinio lauko teorija dar nebuvo pakankamai išvystyta, o topologiniai metodai įprasti, todėl tik devintame dešimtmetyje, po Witten'o [3], Balachandran'o [4] ir Adkins'o [5] darbų, Skyrme'os idėjos išpopuliarėjo. Vėliau modelis buvo tobulinamas ir plečiamas įvairiose fizikos srityse. Daugelyje mokslinių darbų elementariosios dalelės ir lengvieji branduoliai buvo nagrinėjami kaip topologiniai solitonai. Pastaruoju metu Skyrme'os modelis taikomas kvantinio Hall'o efekto aprašyme [6], Bose-Einstein'o kondensatuose [7] ir net kosmologijoje [8].

Topologinių solitonų lygtys yra netiesinės, todėl beveik visada analiziškai neišsprendžiamos. Tiesiogiai kvantuojant solitoninius sprendinius gaunamos gana sudėtingos lygtys, todėl yra taikomas „nulinių modų“ arba „kolektyvinių koordinačių“ artinys [5,9]. Mūsų darbuose taikomas kanoninis kvantavimas SU(3) grupės daugdaroje, kai *ab initio* fizikinės sistemos Lagrange'o funkcijos kvantiniai kintamieji – apibendrintos koordinatės ir apibendrinti greičiai – nekomutuoja. Modelį kanoniškai kvantuojant gaunamos kvantinės pataisos, kurios stabilizuoja solitoninį sprendinį. Perėjimui nuo Lagrange'o prie Hamilton'o operatoriaus naudojamas Sugano *et al.* [10] išvystytas kvantavimo kreivose erdvėse metodas.

Įprastai Skyrme'os modelis yra formuluojamas SU(2) grupės fundamentaliame įvaizdyje, kur laukas apibūdinamas 2×2 unitaria matrica. Modelį galima apibendrinti unitarųjį lauką sukonstravus bet kuriame SU(2) įvaizdyje [11–13]. Visa kanoninio kvantavimo procedūra išlieka nepasikeitusi, tačiau kvantinė masės pataisa ima priklausyti nuo įvaizdžio.

Disertacijoje SU(3) Skyrme'os modelis apibendrinamas įvairiems įvaizdžiams. Tokiu būdu jis praplečiamas diskretiniais parametrais, nuo kurių priklauso sprendinio struktūra ir sistemos energija. Kadangi SU(3) grupės struktūra yra žymiai turtingesnė, galima pasirinkti įvairius klasikinius sprendinius, kurių aplinkoje modelį kvantuojame. Vienas iš tokių sprendinių yra nekanoninės grandinėlės $SU(3) \supset SO(3)$ solitonas. Naudojant racionalaus atvaizdžio artinį, nekanoniškai įdėto solitono formalizmą galima praplėsti barioniniams krūviams, didesniems už vienetą. Šis modelis gali būti panaudotas aprašant lengvuosius branduolius kaip specialius solitonus.

Darbo tikslai

1. Išnagrinėti topologinį Skyrme'os modelį bet kuriame neredukuotiniame SU(3) grupės įvaizdyje. Kanoniškai kvantuojant nustatyti kvantinio hamiltoniano priklausomybę nuo įvaizdžio.

2. Ištirti kvantinį Skyrme'os modelį su nekanoniškai įdėtu SU(3) $\supset$ SO(3) solitonu.

3. Išnagrinėti Skyrme'os modelį su nekanoniškai įdėtu SU(3) $\supset$ SO(3) solitonu racionalaus atvaizdžio artinyje, kai sprendinio barioninis krūvis $B \geq 2$.

Mokslinis naujumas

1. Pirmą kartą buvo apibendrintas Skyrme'os modelis bet kuriame SU(3) grupės įvaizdyje. Modelį kanoniškai kvantuojant gaunamos kvantinės pataisos, esminiai priklausančios nuo įvaizdžio, kuris gali būti traktuojamos kaip naujas diskretinis modelio fenomenologinis parametras. Gautos naujos, netrivialiai nuo SU(3) grupės įvaizdžio priklausančios Wess-Zumino ir chiralinės simetrijos pažeidimo narių išraiškos.

2. Įvestas naujas Skyrme'os modelio solitoninis sprendinys, kuris apibrėžtas nekanoninėje SU(3) $\supset$ SO(3) bazėje. Kanoniškai kvantuojant gautos naujos kvantinių pataisų išraiškos ir du solitono inercijos momentai.

3. Išnagrinėtas SU(3) Skyrme'os modelio nekanoniškai įdėtas solitonas racionalaus atvaizdžio artinyje. Po kanoninio kvantavimo gauti penki skirtingi solitono inercijos momentai ir naujos kvantinės pataisos.

Ginamieji teiginiai

1. Kvantinio SU(3) Skyrme'os modelio Lagrange'o ir Hamilton'o operatoriai ir tankiai įvairiuose įvaizdžiuose (λ,μ) skiriasi. Kanoniškai kvantuojant gaunamos nuo įvaizdžio priklausančios kvantinės pataisos bei Wess-Zumino ir chiralinės simetrijos pažeidimo narių išraiškos. Įvaizdis gali būti traktuojamas kaip naujas modelio fenomenologinis parametras.

2. Į kvantinį Skyrme'os modelį įvedus nekanoninėje $SU(3) \supset SO(3)$ bazėje apibrėžtą solitoną gautas dar vienas modelio variantas. Tai įrodo naujos kvantinių pataisų ir dviejų solitono inercijos momentų išraiškos.

3. Topologiniai solitonai, kurių barioninis krūvis $B \geq 2$, gali būti apibūdinti sprendiniais racionalaus atvaizdžio artinyje nekanoninėje $SU(3) \supset SO(3)$ bazėje. Modelį kanoniškai kvantuojant gaunami penki skirtingi solitono inercijos momentai ir naujos kvantinės pataisos.

Darbo rezultatų aprobacija

Pagrindiniai disertacinio darbo rezultatai buvo publikuoti dvejuose Journal of Mathematical Physics ir viename Bulgarian Journal of Physics moksliniuose žurnaluose. Darbo rezultatai taip pat buvo pristatyti 3-jose nacionalinėse ir 6-iose tarptautinėse konferencijose. Detalus publikacijų ir konferencijų sąrašas pateiktas santraukos pabaigoje.

Asmeninis autoriaus indėlis

Daugumą disertacijoje aprašytų analizinių rezultatų autorius išvedė „pieštuku“ bei naudodamas kompiuterinę algebros sistemą MATHEMATICA.

Disertacijos sandara

Disertacijos (anglų kalba) apimtis – 106 puslapiai. Joje yra 5 iliustracijos. Disertaciją sudaro disertanto mokslinių darbų sąrašas, įvadas, teorinė nagrinėjamo modelio apžvalga, trys pagrindiniai skyriai, išvados, keturi priedai, kuriuose pateikiamos skaičiavimuose naudotos pagalbinės išraiškos, cituojamos literatūros sąrašas ir santrauka lietuvių kalba.

Disertacijos turinys

Įvadas

Įvade trumpai supažindinama su nagrinėjamu modeliu, pagrindžiamas darbo aktualumas, suformuluojami darbo tikslai ir mokslinis naujumas, pristatomi disertacijos ginamieji teiginiai ir pateikiama darbo rezultatų aprobacija.

1. Įvadas į Skyrme'os modelį

Šio skyriaus pradžioje pateikiama trumpa Skyrme'os modelio istorinė apžvalga. Toliau aprašomas netiesinis sigma modelis, kurio pagrindu buvo sukonstruotas Skyrme'os modelis. Mastelio transformacijos parodo, kad sigma modelio baigtinės energijos sprendiniai yra nestabilūs. Skyrme'a įvedė ketvirto laipsnio narį, kuris stabilizuoja sprendinius, ir užrašė modelio lagranžiano tankį:

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} = -\frac{f_\pi^2}{4}\,\mathrm{Tr}\Big(R_\mu R^\mu\Big) + \frac{1}{32e^2}\,\mathrm{Tr}\Big([R_\mu,R_\nu][R^\mu,R^\nu]\Big). \tag{1.1}$$

Modelis turi tik du fenomenologinius parametrus f_π (pionų skilimo konstanta) ir e, kurie nustatomi iš eksperimentinių duomenų. Į lagranžiano tankį įeinanti dešinioji srovė $R_\mu = (\partial_\mu U)U^\dagger$ apibrėžiama kaip speciali unitariosios matricos išvestinė pagal erdvės ir laiko kintamuosius ir įgyjanti reikšmes grupės algebroje. Į Lagrange'o tankį įeinantis unitarusis laukas $U(\mathbf{x},t)$ gali būti apibrėžiamas bet kuriame SU(2), SU(3) ar SU(N) grupių įvaizdyje. Pareikalavus, kad fiksuotu laiko momentu unitariojo lauko energija būtų baigtinė, pasirenkame $U(|\mathbf{x}| \to \infty) = \mathbb{1}$ (begalybėje unitarusis laukas prilyginamas vienetinei matricai), erdvė $\mathbb{R}^3$ yra kompaktifikuojama į trimatę S^3 hipersferą, o statinis unitarusis laukas išreiškia atvaizdavimą $\mathrm{S}^3 \to \mathrm{S}^3$. Šis atvaizdavimas, o tuo pačiu ir visi modelio sprendiniai, suskyla į homotopijų klases, kurios žymimos sveikais skaičiais – topologiniu (barioniniu) krūviu:

$$B = \int \mathcal{B}^0 \mathrm{d}^3x = \frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{0\nu\alpha\beta}\int \mathrm{d}^3x\,\mathrm{Tr}\Big(R_\nu R_\alpha R_\beta\Big). \tag{1.2}$$

Išvarijavus Skyrme'os lagranžianą (1.1) gaunama judėjimo lygtis, kuri yra stipriai netiesinė ir analiziškai neišsprendžiama. Klasikiniu atveju solitoninis sprendinys gaunamas panaudojus Skyrme'os įvestą ežio tipo sprendinį (ansätze), nepriklausantį nuo laiko:

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}) &= \exp\left(\mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\mathbf{x}}F(r)\right) \\ &= \cos F(r) + \mathrm{i}\boldsymbol{\tau}\cdot\hat{\mathbf{x}}\sin F(r). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Čia $\hat{\mathbf{x}}$ yra vienetinis vektorius, statmenas koordinatiniam paviršiui $r =$ const, $\boldsymbol{\tau}$ – Pauli matricos, o $F(r)$ – sferinių koordinačių kintamojo r skaliarinė funkcija. Ji tenkina kraštines sąlygas $F(0) = \pi$ ir $F(\infty) = 0$. Kai $B = 1$, šių judėjimo lygčių sferiškai simetrinis sprendinys dažnai vadinamas ežio tipo sprendiniu. Jis yra kombinuoto sukimo įprastoje $\mathbb{R}^3$ ir izosukinio erdvėje invariantas, todėl ežio tipo sprendinį galima apibendrinti bet kokiam grupės įvaizdžiui. Solitoninį sprendinį (1.3) įstačius į (1.1) formulę, Lagrange'o tankis išreiškiamas per funkciją $F(r)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{cl}} = -\,\mathcal{M}_{\mathrm{cl}}(F(r)) = -\Bigg\{ & \frac{f_\pi^2}{2}\Big(F'^2 + \frac{2}{r^2}\sin^2 F\Big) \\ & + \frac{1}{2e^2}\frac{\sin^2 F}{r^2}\Big(2F'^2 + \frac{\sin^2 F}{r^2}\Big)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pareikalavę, kad solitono masė būtų stacionari, ir įvedę bedimensinį kintamąjį $\tilde{r} = ef_\pi r$, gauname judėjimo lygtį funkcijai $F(r)$, kuri nepriklauso nuo modelio parametrų f_π ir e:

$$\begin{aligned} F''(\tilde{r})\Big(1 + \frac{2\sin^2 F(\tilde{r})}{\tilde{r}^2}\Big) + F'^2(\tilde{r})\frac{\sin 2F(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} + \frac{2}{\tilde{r}}F'(\tilde{r}) & \\ - \frac{\sin 2F(\tilde{r})}{\tilde{r}^2} - \frac{\sin 2F(\tilde{r})\sin^2 F(\tilde{r})}{\tilde{r}^4} &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Tai netiesinė antro laipsnio lygtis, kurios kraštinės sąlygos $F(0) = n\pi$ bei $F(\infty) = 0$, ir ji yra sprendžiama tik skaitmeniškai.

Toliau skyriuje pateikiamas racionalaus atvaizdžio artinio formalizmas su kai kurių atvaizdų iliustracijomis ir įvairūs Skyrme'os modelio apibendrinimo metodai. Čia taip pat aprašomas Wess-Zumino dėmens matematinis aparatas ir mūsų naudojamas Skyrme'os modelio kvantavimo metodas, kuris vykdomas šiais etapais:

1. Įvedamos tik nuo laiko priklausančios kvantinės kolektyvinės koordinatės $A\big(q(t)\big)$.

2. Užrašomas kvantinis lagranžianas su kvantiniais dinaminiais kintamaisiais $\mathbf{q}(t)$.
3. Naudojantis Sugano *et al.* [10,14] išvystytu kvantavimo kreivose erdvėse metodu surandamas kvantinis hamiltonianas.
4. Išsprendžiama integrodiferencialinė lygtis kvantinei funkcijai $F(r)$.

Kolektyvinių koordinačių metodu [5] atskiriami kintamieji, priklausantys nuo erdvinių koordinačių ir nuo laiko:

$$U\big(\mathbf{x},q(t)\big) = A\big(q(t)\big)U_0(\mathbf{x})A^\dagger\big(q(t)\big). \tag{1.6}$$

Čia $A\big(q(t)\big)$ yra unitari matrica, priklausanti tik nuo kolektyvinių koordinačių. Šios koordinatės – Euler'io kampai – yra modelio kvantiniai kintamieji ir kartu su apibendrintais greičiais $\dot{q}(t)$ tenkina komutavimo sąlygas

$$\big[\dot{q}^k, q^l\big] = -\mathrm{i}g^{kl}(q), \tag{1.7}$$

kur $g^{kl}(q)$ yra tik apibendrintų koordinačių q funkcija. Tenzorius $g^{kl}(q)$ yra simetrinis indeksų sukeitimo atžvilgiu, nes $[q^k, q^l] = 0$. Komutavimo taisykles tarp apibendrintų greičių $\dot{q}^k$ ir bet kokia nuo apibendrintų koordinačių priklausančia funkcija $G(q)$ galima užrašyti taip:

$$\big[\dot{q}^k, G(q)\big] = -\mathrm{i}\sum_r g^{kl}(q)\frac{\partial}{\partial q^l}G(q). \tag{1.8}$$

Kadangi greičiai ir koordinatės nekomutuoja, jie diferencijuojami griežtai pagal Newton'o – Leibnitz'o taisykles. Tai atitinka Weyl'io simetrizavimo taisykles:

$$(\partial_t G(q))_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2}\Big\{\dot{q}^l, \frac{\partial G(q)}{\partial q^l}\Big\}. \tag{1.9}$$

Į Lagrange'o funkcijos tankį (1.1) įstačius kvantinį unitarųjį lauką (1.6) ir suintegravus pagal erdvines koordinates gauname kvantinę Lagrange'o funkciją $L(q,\dot{q},F)$, priklausančią nuo kvantinių koordinačių q ir apibendrintų greičių $\dot{q}$. Kanoninis impulsas

$$p_\alpha = \frac{\partial L(q,\dot{q},F)}{\partial \dot{q}^\alpha} \tag{1.10}$$

patenkina standartinį kvantinės mechanikos komutavimo sąryšį $\big[p_\alpha,q^\beta\big] = -\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}$. Iš šio sąryšio surandamos kvantinių koordinačių ir greičių komutavimą nusakančių funkcijų $g^{kl}(q)$ išraiškos.

2. Apibendrinto SU(3) Skyrme'os modelio kanoninis kvantavimas

Modelio unitarusis laukas $U(\mathbf{x},t)$ formuluojamas bet kuriame SU(3) grupės neredukuotiniame įvaizdyje (λ,μ). Šį lauką patogu išreikšti SU(3) grupės Wignerio D matricų forma:

$$U(\mathbf{x},t) = D^{(\lambda,\mu)}(\alpha^i(\mathbf{x},t)). \tag{2.1}$$

Aštuoni Eulerio kampai $\alpha^i(\mathbf{x},t)$, nuo kurių priklauso unitarusis laukas, yra modelio dinaminiai kintamieji. Į Skyrme'os lagranžiano tankį (1.1) įeinanti dešinioji chiralinė srovė

$$R_\mu = (\partial_\mu U)\, U^\dagger = \partial_\mu \alpha^i C_i^{(Z,I,M)}(\alpha) \left\langle \ \middle| \, J^{(1,1)}_{(Z,I,M)} \middle| \ \right\rangle \tag{2.2}$$

išreiškiama unitariojo lauko funkcijomis $C_i^{(Z,I,M)}(\alpha)$ ir SU(3) grupės generatoriais $J^{(1,1)}_{(Z,I,M)}$. Isosukinys I bei jo projekcijos M ir Z, kurios susietos su hiperkrūviu sąryšiu $Y = -2Z$, nusako įvaizdžio (1,1) bazines funkcijas.

SU(3) grupės generatoriai apibrėžiami kaip neredukuotinių tenzorių (1,1) komponentės ir gali būti išreiškiami per Gell-Man'o matricas Λ_k:

$$\begin{aligned}
J^{(1,1)}_{(0,0,0)} &= -\frac{1}{2}\Lambda_8\,, & J^{(1,1)}_{(0,1,0)} &= \frac{1}{2}\Lambda_3,\\
J^{(1,1)}_{(0,1,1)} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Lambda_1 + \mathrm{i}\Lambda_2\right), & J^{(1,1)}_{(0,1,-1)} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Lambda_1 - \mathrm{i}\Lambda_2\right),\\
J^{(1,1)}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Lambda_4 + \mathrm{i}\Lambda_5\right), & J^{(1,1)}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Lambda_6 + \mathrm{i}\Lambda_7\right),\\
J^{(1,1)}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Lambda_6 - \mathrm{i}\Lambda_7\right), & J^{(1,1)}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\Lambda_4 - \mathrm{i}\Lambda_5\right).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Dėl pasirinktos bazės generatoriai yra neermitiniai $\left(J^{(1,1)}_{(Z,I,M)}\right)^\dagger = (-1)^{Z+M}$ $\times\, J^{(1,1)}_{(-Z,I,-M)}$, bet jų komutatorius galima užrašyti gana paprastai:

$$\left[J^{(1,1)}_{(Z',I',M')}, J^{(1,1)}_{(Z'',I'',M'')}\right] = -\sqrt{3}\left[\begin{matrix} (1,1) & (1,1) & (1,1)_a \\ (Z',I',M') & (Z'',I'',M'') & (Z,I,M)\end{matrix}\right] J^{(1,1)}_{(Z,I,M)}. \tag{2.4}$$

Dešinėje pusėje laužtiniuose skliaustuose esantis daugiklis yra SU(3) grupės antisimetrinis Clebsch-Gordan'o koeficientas.

Nagrinėjamo SU(3) Skyrme'os modelio veikimas užrašomas forma

$$S = \int \mathrm{d}^4 x (\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} + \mathcal{L}_{\mathrm{SB}}) + S_{\mathrm{WZ}}, \tag{2.5}$$

kur $\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}}$ yra chirališkai simetriškas Skyrme'os lagranžiano tankis (1.1), $\mathcal{L}_{\mathrm{SB}}$ – simetrijos pažeidimo dėmuo, o S_{WZ} – Wess-Zumino veikimas.

Klasikiniame SU(3) Skyrme'os modelyje priklausomybė nuo įvaizdžio išreiškiama bendru normavimo daugikliu

$$N = \frac{1}{4} \dim(\lambda,\mu) C_2^{\mathrm{SU(3)}}(\lambda,\mu), \tag{2.6}$$

kuris parinktas taip, kad mažiausias barioninis krūvis būtų lygus vienetui: $B = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{B}^0(x) = 1$. $C_2^{\mathrm{SU(3)}}(\lambda,\mu) = \frac{1}{3}\left(\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu + 3\lambda + 3\mu\right)$ yra tikrinė SU(3) kvadratinio Casimir'o operatoriaus vertė. Dėl bendro normavimo daugiklio klasikinio SU(3) Skyrme'os modelio sprendiniai nepriklauso nuo įvaizdžio.

Klasikinis SU(3) solitono sprendinys bet kuriame įvaizdyje (λ,μ) gali būti išdėstytas neredukuotiniais įvaizdžiais kaip SU(2) grupės Wigner'io D matricų tiesioginė suma:

$$U_0\left(\hat{x}, F(r)\right) = \exp \mathrm{i} 2 \Big(J^{(1,1)}_{(0,1,\cdot)} \cdot \hat{x} \Big) F(r) = \sum_{z,j}^{(\lambda,\mu)} \oplus D^j(\varkappa). \tag{2.7}$$

Šie SU(2) įvaizdžiai, įdėti į (λ,μ) neredukuotinį įvaizdį, apibrėžiami kanonine redukcijos grandinėle SU(3) $\supset$ SU(2). Solitoninį sprendinį (2.7) įdėjus į lagranžiano tankį (1.1) ir pernormavus normavimo daugikliu (2.6), gaunamos standartinės (1.4) ir (1.5) klasikinio Skyrme'os modelio išraiškos .

SU(3) modelis kvantuojamas įvedant kolektyvines koordinates (1.6), kurios atskiria erdvinius ir nuo laiko priklausomus kintamuosius. Dėl U_0 solitoninio sprendinio formos (2.7) unitarusis laukas U yra invariantinis kolektyvinių koordinačių matricos $A(q(t)) = D^{(\lambda,\mu)}(q(t))$ dešininės U(1) transformacijos atžvilgiu:

$$A(q(t)) \to A(q(t)) \exp \beta J^{(1,1)}_{(0,0,0)}, \tag{2.8}$$

todėl modelis yra nagrinėjamas septynių dimensijų homogeninėje SU(3)/U(1) erdvėje, kurią nusako septyni nepriklausomi parametrai $q^k(t)$.

Kanoniškai kvantuojant, apibendrintos koordinatės ir greičiai tenkina (1.7) komutavimo sąlygas, o tvarkant modelio išraiškas naudojamasi (1.8) komutavimo taisykle ir Weyl'io simetrizavimu (1.9).

Norėdami surasti metrinio tenzoriaus išraišką, pirmiausia apskaičiuojame Skyrme'os lagranžianą greičių kvadratų tikslumu:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{Sk}} &\approx \frac{1}{2}\,\dot{q}^{\alpha} g_{\alpha\beta}(q,F)\dot{q}^{\beta} + \mathcal{O}\Big(({\dot q})^0\Big) \\ &\approx \frac{1}{8}\left\{\dot{q}^{\alpha}, C'^{(A)}_{\alpha}(q)\right\} E_{(A)(B)}(F) \left\{\dot{q}^{\beta}, C'^{(B)}_{\beta}(q)\right\} + \mathcal{O}\Big(({\dot q})^0\Big). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Čia lagranžianas (2.9) normuojamas daugikliu (2.6), o metrinis tenzorius turi pavidalą

$$g_{\alpha\beta}(q,F) = C'^{(A)}_{\alpha}(q) E_{(A)(B)}(F) C'^{(B)}_{\beta}(q), \tag{2.10}$$

kur

$$E_{(Z,I,M)(Z',I',M')}(F) = -(-1)^{Z+M} a_I(F) \delta_{Z,-Z'} \delta_{I,I'} \delta_{M,-M'}. \tag{2.11}$$

Solitono inercijos momentai užrašomi kaip bedimensinio kintamojo $\tilde{r} = e f_\pi r$ integralai:

$$a_0(F) = 0, \tag{2.12a}$$

$$a_{\frac{1}{2}}(F) = \frac{1}{e^3 f_\pi} 2\pi \int \mathrm{d}\tilde{r}\tilde{r}^2 \left(1 - \cos F\right) \left(1 + \frac{1}{4} F'^2 + \frac{1}{2\tilde{r}^2} \sin^2 F\right), \tag{2.12b}$$

$$a_1(F) = \frac{1}{e^3 f_\pi} \frac{8\pi}{3} \int \mathrm{d}\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F \left(1 + F'^2 + \frac{1}{r^2} \sin^2 F\right). \tag{2.12c}$$

Sujungtinis koordinatei q^β kanoninis impulsas apskaičiuojamas kvantinėje mechanikoje įprastu būdu:

$$p^{(0)}_{\beta} = \frac{\partial L_{\mathrm{Sk}}}{\partial \dot{q}^{\beta}} = \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^{\alpha}, g_{\alpha\beta}\right\}. \tag{2.13}$$

Naudojantis kvantinių kintamųjų matricų sandaugos $A^{\dagger}\dot{A}$ išraiška ir pagalbinėmis išraiškomis, pateiktomis disertacijoje, apskaičiuojama tiksli Skyrme'os lagranžiano išraiška:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{Sk}} = \int \mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} \mathrm{d}^3 x = &-\frac{1}{8\,a_{\frac{1}{2}}} (-1)^{\bar{A}} \left\{\dot{q}^{i}, C'^{(\bar{A})}_{i}(q)\right\} \left\{\dot{q}^{i'}, C'^{(-\bar{A})}_{i'}(q)\right\} \\ &- \frac{1}{8}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{\frac{1}{2}}}\right)(-1)^{M} \left\{\dot{q}^{i}, C'^{(0,1,M)}_{i}(q)\right\} \left\{\dot{q}^{i'}, C'^{(0,1,-M)}_{i'}(q)\right\} \\ &- M_{\mathrm{cl}} - \Delta M_1 - \Delta M_2 - \Delta M_3 - \Delta M'(q). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Čia $M_{\mathrm{cl}} = \frac{f_\pi}{e}\tilde{M}_{\mathrm{cl}} = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{M}_{\mathrm{cl}}(F)$ yra klasikinė masė, $\Delta M_k = e^3 f_\pi \Delta\tilde{M}_k = \int \mathrm{d}^3x\Delta\mathcal{M}_k(F)$ – kvantinės pataisos, kur $k = 1{,}2{,}3$, o dėmuo $\Delta M'(q) = \int \mathrm{d}^3x\Delta\mathcal{M}'(q)$ yra konfigūracinės erdvės operatorius. Kvantinių pataisų priklausomybė nuo įvaizdžio $(\lambda{,}\mu)$ išreiškiama per SU(3) kvadratinius Casimir'o operatorius:

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{M}_1(F) = -\frac{\sin^2 F}{30\,a_1^2}\Bigg\{ & f_\pi^2\left(12\sin^2 F\cdot C_2^{\mathrm{SU(3)}} - 16\sin^2 F + 15\right)\\ & + \frac{1}{2e^2}\Bigg(2F'^2\left(12\cos^2 F\cdot C_2^{\mathrm{SU(3)}} + 16\sin^2 F - 1\right)\\ & \qquad + \frac{\sin^2 F}{r^2}\left(6C_2^{\mathrm{SU(3)}} + 7\right)\Bigg)\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.15a}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{M}_2(F) = -\frac{(1-\cos F)}{20\,a_{\frac{1}{2}}^2}\Bigg\{ & f_\pi^2\left(6\,(1-\cos F)\,C_2^{\mathrm{SU(3)}} + 3\cos F + 2\right)\\ & + \frac{1}{4e^2}\left(F'^2\left(6\,(1+\cos F)\,C_2^{\mathrm{SU(3)}} - 3\cos F + 2\right) + 10\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.15b}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{M}_3(F) = -\frac{\sin^2 F}{30\,a_1\,a_{\frac{1}{2}}}\Bigg\{ & f_\pi^2\left(12\,(1-\cos F)\,C_2^{\mathrm{SU(3)}} + 16\cos F - 1\right)\\ & + \frac{1}{2e^2}\left(F'^2\left(4\cos F\cdot\left(3C_2^{\mathrm{SU(3)}} - 4\right) + 15\right) + 15\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\Bigg\},\end{aligned} \tag{2.15c}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{M}'(F{,}q) = -\frac{3(1-\cos F)}{16\,a_{\frac{1}{2}}^2} & \left\{f_\pi^2 + \frac{1}{4e^2}\left(F'^2 + \frac{2}{r^2}\sin^2 F\right)\right\}\\ & \times\left((-1)^{\bar{\bar{A}}} C'^{\alpha}_{(\bar{\bar{A}})}(q) C'^{(0)}_{\alpha}(q) C'^{\beta}_{(-\bar{\bar{A}})}(q) C'^{(0)}_{\beta}(q) + 4\right).\end{aligned} \tag{2.15d}$$

Lagranžiano (2.14) ir $\Delta M'$ dėmens (2.15d) išraiškose su vienu brūkšneliu esantys indeksai $\bar{A}$ ir $\bar{B}$ reiškia, kad sumuojant yra įskaitomos bazinės būsenos $(Z{,}I{,}M)$, išskyrus būseną (0,0,0), o pažymėjimas $\bar{\bar{A}}$ rodo, kad sumuojant įskaitoma tik būsenos $I = \frac{1}{2}$ ir $Z = \pm\frac{1}{2}$.

Kad Skyrme'os modelis atitiktų elementariųjų dalelių fizikoje stebimą simetriją, įvedamas Wess-Zumino (WZ) dėmuo, kuris pažeidžia Skyrme'os modelio laiko apgręžtinumo ir lygiškumo simetrijas išlaikant simetriją operacijos ($t \to -t,\ x \to -x,\ U \to U^\dagger$) atžvilgiu [15]. Wess-Zumino veikimas užrašomas kaip integralas penkių dimensijų daugdaroje D^5, kurios riba yra keturmatis kompaktifikuotas erdvėlaikis $\partial\mathrm{D}^5 = \mathrm{D}^4 = \mathrm{S}^3 \times \mathrm{S}^1$:

$$S_{\mathrm{WZ}}(U) = -\frac{\mathrm{i}N_\mathrm{c}}{240\pi^2 N'} \int\limits_{\mathrm{D}_5} \mathrm{d}^5x\, \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho\sigma}\, \mathrm{Tr}\Big(R_\mu R_\nu R_\lambda R_\rho R_\sigma\Big). \tag{2.16}$$

Čia N_c yra kvantinėje chromodinamikoje naudojamas spalvų skaičius, o N' – normavimo daugiklis. WZ dėmuo klasikiniame modelyje lygus nuliui, tačiau kvantinėje teorijoje vaidina svarbų vaidmenį. Pritaikius Stokes'o teoremą, Wess-Zumino dėmuo užrašomas įprastinėje trimatėje erdvėje:

$$\begin{aligned} L_{\mathrm{WZ}}(q,\dot q) =& -\frac{\mathrm{i}N_\mathrm{c}}{24\pi^2 N'} \int \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{mjk}\, \mathrm{Tr}\Big((\partial_m U_0)\, U_0^\dagger\, (\partial_j U_0)\, U_0^\dagger \\ & \times (\partial_k U_0)\, U_0^\dagger J^{(1,1)}_{(0,0,0)}\Big) \frac{1}{2} \Big\{\dot q^\alpha, C'^{(0)}_\alpha(q)\Big\} \\ =& -\lambda' \frac{\mathrm{i}}{2} \Big\{\dot q^\alpha, C'^{(0)}_\alpha(q)\Big\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Čia

$$\lambda' = \frac{\sqrt{3} N_\mathrm{c} B}{40 N'}\, \dim(\lambda,\mu) C_3^{\mathrm{SU}(3)}(\lambda,\mu), \tag{2.18}$$

kur $C_3^{\mathrm{SU}(3)}(\lambda,\mu) = \frac{1}{9}(\lambda-\mu)(2\lambda+\mu+3)(2\mu+\lambda+3)$ yra kubinio Casimir'o operatoriaus tikrinė vertė. Dėl šio operatoriaus įtakos koeficientui λ' sau sujungtiniams ($\lambda = \mu$) įvaizdžiams Wess-Zumino dėmuo išnyksta.

Sistemos su WZ nariu kanoninis impulsas apibrėžiamas septyniomis kolektyvinėmis koordinatėmis:

$$p_\alpha = \frac{1}{2}\left\{\dot q^\beta, g_{\beta\alpha}\right\} - \mathrm{i}\lambda' C'^{(0)}_\alpha(q), \tag{2.19}$$

kurios tenkina kanonines komutavimo taisykles. Tuomet septyni dešininės transformacijos generatoriai gali būti apibrėžiami taip:

$$\hat R_{(\bar A)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\Big\{p_\alpha + \lambda' \mathrm{i} C'^{(0)}_\alpha(q), C'^{\alpha}_{(\bar A)}(q)\Big\} = \frac{\mathrm{i}}{2}\Big\{\dot q^\beta, C'^{(\bar B)}_\beta(q)\Big\} E_{(\bar B)(\bar A)}. \tag{2.20}$$

Aštuntąjį dešininį generatorių apibrėžus per WZ nario koeficientą $\hat R_{(0)} = -\lambda'$, galima užrašyti aštuonis kairinės transformacijos generatorius:

$$\begin{aligned} \hat L_{(B)} =& \frac{1}{2}\Big\{\hat R_{(A)}, D^{(1,1)}_{(A)(B)}(-q)\Big\} \\ =& \frac{\mathrm{i}}{2}\Big\{p_\beta + \lambda' \mathrm{i} C'^{(0)}_\beta(q), K^\beta_{(B)}(q)\Big\} + \lambda' D^{(1,1)}_{(0)(B)}(-q), \end{aligned} \tag{2.21}$$

kur

$$K^{\beta}_{(B)}(q) = C'^{\beta}_{(\bar{A})}(q) D^{(1,1)}_{(\bar{A})(B)}(-q). \tag{2.22}$$

Įskaičius Wess-Zumino narį, užrašomas efektyvusis lagranžianas:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = {} & \frac{1}{2a_{\frac{1}{2}}} \left((-1)^A \hat{L}_{(A)} \hat{L}_{(-A)} - \lambda'^2 \right) + \left(\frac{1}{2a_1} - \frac{1}{2a_{\frac{1}{2}}} \right) \left(\hat{R}_{(0,1,\cdot)} \cdot \hat{R}_{(0,1,\cdot)} \right) \\ & - \lambda' \frac{\mathrm{i}}{2} \left\{ \dot{q}^{\alpha}, C'^{(0)}_{\alpha}(q) \right\} - M_{\text{cl}} - \Delta M_1 - \Delta M_2 - \Delta M_3. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Pažymėtina, kad dėl kairinės transformacijos generatorių lagranžiano išraiškoje (2.23) išnyksta nuo kvantinių kintamųjų priklausantis dėmuo $\Delta M'(q)$. WZ dėmuo gali būti suprantamas kaip išorinis sistemos potencialas [16].

Kvantinis hamiltonianas surandamas naudojantis Sugano *et al.* [10,14] išvystytu kvantavimo kreivose erdvėse metodu. Pagal šį metodą užrašoma pagalbinė funkcija:

$$\begin{aligned} Z(q) = {} & -\frac{1}{16} f^{ab} f^{cd} f^{ek} \left(\partial_a g_{cd} \right) \left(\partial_b g_{ek} \right) - \frac{1}{4} \partial_a \left(f^{ab} f^{cd} \partial_b g_{cd} \right) - \frac{1}{4} \partial_a \partial_b f^{ab} \\ = {} & -\frac{1}{4} \partial_b C'^{a}_{(\bar{A})}(q) E^{(\bar{A})(\bar{B})} \partial_a C'^{b}_{(\bar{B})}(q) \\ & + \frac{3}{16\, a_{\frac{1}{2}}} \left((-1)^{\bar{\bar{A}}} C'^{(0)}_{a}(q) C'^{a}_{(\bar{\bar{A}})}(q) C'^{b}_{(-\bar{\bar{A}})}(q) C'^{(0)}_{b}(q) + 4 \right), \end{aligned} \tag{2.24}$$

kuri būtina hamiltoniano išraiškoje, kad kvantinės Euler'io ir Lagrange'o lygtys sutaptų su kvantinėmis Hamilton'o lygtimis. Tuomet hamiltonianas užrašomas taip:

$$H = \frac{1}{2} \{ p_{\alpha}, \dot{q}^{\alpha} \} - L_{\text{eff}} - Z(q) = K + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \Delta M_3 + M_{\text{cl}}. \tag{2.25}$$

Čia K yra kovariantinis kinetinis dėmuo, išplaukiantis iš efektyvaus lagranžiano (2.23) operatorinės dalies.

Hamiltoniano (2.25) tikrinių būsenų vektoriai yra

$$\left| \begin{matrix} (\Lambda,M) \\ Y,T,M_T; Y',S,M_S \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\dim(\Lambda,M)} D^{*(\Lambda,M)}_{(Y,T,M_T)(Y',S,M_S)}(q) \left| 0 \right\rangle, \tag{2.26}$$

kur dešinėje pusėje esantys dydžiai D yra kompleksiškai sujungtiniai SU(3) grupės neredukuotinio įvaizdžio (Λ,M) Wigner'io matricos elementai.

Su (1.6) solitoniniu sprendiniu simetrijos pažeidimo tankio operatorius užrašomas bet kuriam neredukuotiniam įvaizdžiui (λ,μ):

$$\mathcal{L}_{\mathrm{SB}} = -\mathcal{M}_{\mathrm{SB}} = -\frac{1}{N}\frac{f_\pi^2}{4}\Big(m_0^2 \operatorname{Tr}\Big(U_0+U_0^\dagger - 2\cdot \mathbb{1}\Big) \\ - 2m_8^2 \operatorname{Tr}\Big(\Big(U_0+U_0^\dagger\Big) J^{(1,1)}_{(0,0,0)}\Big)\ D^{(1,1)}_{(0)(0)}(-q)\Big), \qquad (2.27)$$

kur parametrai m_0 ir m_8 apskaičiuojami iš eksperimentinių π ir K mezonų masių:

$$m_0^2 = \frac{1}{3}\left(m_\pi^2 + 2m_K^2\right), \qquad m_8^2 = \frac{10}{3\sqrt{3}}\frac{C_2^{\mathrm{SU}(3)}(\lambda,\mu)}{C_3^{\mathrm{SU}(3)}(\lambda,\mu)}\left(m_\pi^2 - m_K^2\right). \qquad (2.28)$$

Dėl matricinių elementų $D^{(1,1)}$ įtakos simetrijos pažeidimo operatorius nėra tikrinis įvaizdžio (Λ,M) būsenoms (2.26). Masės dėmuo (2.27) į lagranžianą įneša nedidelį indėlį, todėl jis gali būti traktuojamas kaip perturbacija.

Simetriją pažeidžiančio nario priklausomybė nuo neredukuotinio įvaizdžio (λ,μ) išplaukia iš unitariojo lauko U_0. Išraiškoje (2.27) esantis pirmasis

$$\operatorname{Tr}\Big(U_0+U_0^\dagger - 2\cdot\mathbb{1}\Big) = \frac{2}{2\sin F(r) - \sin 2F(r)}\Big(\sin(1+\lambda)F(r) \\ + \sin(1+\mu)F(r) - \sin(\lambda+\mu+2)F(r)\Big) \\ - 2\dim(\lambda,\mu) \qquad (2.29)$$

ir antrasis

$$\operatorname{Tr}\Big(\Big(U_0+U_0^\dagger\Big) J^{(1,1)}_{(0,0,0)}\Big) = \frac{2\sqrt{3}}{2\sin F(r) - \sin 2F(r)} \\ \times\Big\{\frac{1}{2}(1+\mu)\Big(\sin(1+\mu)F(r) - \sin(\lambda+\mu+2)F(r)\Big) \\ + \frac{1}{3}(\lambda-\mu)\Big(\sin(1+\lambda)F(r) + \sin(1+\mu)F(r) - \sin(\lambda+\mu+2)F(r)\Big) \\ + \frac{1}{2}(1+\lambda)\Big((\sin F(r) - \sin(2+\mu)F(r))\cos\lambda F(r) \\ - (\cos F(r) - \cos(2+\mu)F(r))\sin\lambda F(r)\Big)\Big\} \qquad (2.30)$$

dėmenys funkcionaliai priklauso nuo įvaizdžio (λ,μ). Sau sujungtiniams įvaizdžiams $(\lambda = \mu)$ simetriją pažeidžiantis narys supaprastėja iki SU(2) Skyrme'os modeliui įprastos formos.

3. Kvantinis SU(3) Skyrme'os modelis su nekanoniškai įdėtu SO(3) solitonu

Su SU(3) grupe susieto modelio struktūra yra žymiai sudėtingesnė, todėl įvairiau galima parinkti klasikinius sprendinius, kurių aplinkoje kvantuojami solitonai. Į fundamentalų trimatį SU(3) grupės įvaizdį mes įdedame fundamentalų trimatį SO(3) grupės įvaizdį, kuris skiriasi nuo anksčiau Balachandran'o pasiūlyto įvaizdžio [17], ir parenkame grupės generatorių tiesinę kombinaciją, atitinkančią nekanoninę redukcijos grandinėlę $\mathrm{SU(3)} \supset \mathrm{SO(3)}$. Nagrinėdamas kolektyvinį branduolių judėjimą tokias nekanonines grandinėles išvystė Elliott'as [18].

Unitarusis laukas $U(\mathbf{x},t)$ apibrėžiamas pasirinktame SU(3) grupės neredukuotiniame įvaizdyje (λ,μ). Modifikuotas Skyrme'os modelis konstruojamas su standartiniu lagranžiano tankiu (1.1), kur dešinioji srovė

$$R_\mu = (\partial_\mu U)\, U^\dagger = \partial_\mu \alpha^i C_i^{(L,M)}(\alpha) \left\langle \;\middle|\; J^{(1,1)}_{(L,M)} \;\middle|\; \right\rangle \tag{3.1}$$

išreiškiama unitariojo lauko funkcijomis $C_i^{(L,M)}(\alpha)$, kurios priklauso nuo aštuonių grupės parametrų α^i ir nekanoninių SU(3) grupės generatorių $J^{(1,1)}_{(L,M)}$. Šiuo atveju unitarųjį lauką $U(\mathbf{x},t)$ nagrinėjome tik fundamentaliame įvaizdyje (1,0).

Klasikinis sprendinys sukonstruojamas iš įprastinio SU(2) grupės solitoninio sprendinio, apibendrinto bet kuriam neredukuotiniam įvaizdžiui j [11],

$$\exp \mathrm{i}(\boldsymbol{\tau} \cdot \hat{x}) F(r) \to \exp \mathrm{i}2(\hat{J} \cdot \hat{x}) F(r) = U_0\left(\hat{x}, F(r)\right) = D^j\left(\hat{x}, F(r)\right). \tag{3.2}$$

Čia $\hat{J}$ yra SU(2) grupės generatorius. Solitoninio sprendinio priklausomybę nuo įvaizdžio j nusakantys Wigner'io D^j matriciniai elementai

$$D^j_{a,a'}(\hat{x}, F(r)) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2j+1} w^j_l(F) \begin{bmatrix} j & l & j \\ a & m & a' \end{bmatrix} Y_{l,m}(\theta,\varphi), \tag{3.3}$$

išreiškiami sferinėmis $Y_{l,m}(\theta,\varphi)$ ir funkcijomis $F(r)$:

$$
\begin{aligned}
w_0^1(F) &= \sqrt{2}\left(3 - 4\sin^2 F\right), & w_0^2(F) &= \left(5 - 20\sin^2 F + 16\sin^4 F\right),\\
w_1^1(F) &= \mathrm{i}2\sqrt{3}\sin 2F, & w_1^2(F) &= \mathrm{i}\sqrt{2}\left(\sin 2F + 2\sin 4F\right),\\
w_2^1(F) &= -\,4\sin^2 F, & w_2^2(F) &= -\,\frac{2\sqrt{2\cdot 5}}{\sqrt{7}}\left(7 - 8\sin^2 F\right)\sin^2 F,\\
& & w_3^2(F) &= -\,\mathrm{i}4\sqrt{2}\sin^2 F\sin 2F,\\
& & w_4^2(F) &= \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}\sin^4 F. \qquad (3.4)
\end{aligned}
$$

Darbe solitoniniam sprendiniui (3.2) parinktas trimatis SU(2) grupės įvaizdis atitinka SO(3) grupės fundamentalųjį įvaizdį. Tokiu atveju patogu apibrėžti SU(3) grupės neredukuotinių įvaizdžių bazinius vektorius nekanoninėje bazėje, atitinkančioje redukcijos grandinėlę SU(3) $\supset$ SO(3). Nekanoninius SU(3) grupės generatorius galima išreikšti kanoniniais generatoriais $J^{(1,1)}_{(Z,I,M)}$, kurie buvo apibrėžti (2.3) išraiškose:

$$
\begin{aligned}
J_{(1,1)} &= \sqrt{2}\left(J^{(1,1)}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})} - J^{(1,1)}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\right), & J_{(1,0)} &= 2J^{(1,1)}_{(0,1,0)},\\
J_{(1,-1)} &= \sqrt{2}\left(J^{(1,1)}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} + J^{(1,1)}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}\right), & J_{(2,2)} &= -2J^{(1,1)}_{(0,1,1)},\\
J_{(2,1)} &= -\sqrt{2}\left(J^{(1,1)}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})} + J^{(1,1)}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\right), & J_{(2,0)} &= -2J^{(1,1)}_{(0,0,0)},\\
J_{(2,-1)} &= -\sqrt{2}\left(J^{(1,1)}_{(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})} - J^{(1,1)}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}\right), & J_{(2,-2)} &= 2J^{(1,1)}_{(0,1,-1)}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Šie generatoriai tenkina komutavimo sąryšį

$$
\left[J_{(L',M')},J_{(L'',M'')}\right] = -2\sqrt{3}\begin{bmatrix} (1,1) & (1,1) & (1,1)_a \\ L',M' & L'',M'' & L,M \end{bmatrix} J_{(L,M)}, \qquad (3.6)
$$

kur koeficientas laužtiniuose skliaustuose yra SU(3) grupės nekanoninis antisimetrinis Clebsch-Gordan'o koeficientas.

Modelis kvantuojamas įvedant kolektyvines koordinates (1.6), kur klasikinis sprendinys U_0 yra mūsų anksčiau apibrėžtas SO(3) skyrmionas (3.3). Kaip ir anksčiau, taikomas kanoninis kvantavimas SU(3) grupės daugdaroje, kai fizikinės sistemos Lagrange'o funkcijos kvantiniai kintamieji – apibendrintos koordinatės ir apibendrinti greičiai nekomutuoja (1.7). Šiuo atveju sprendinys U_0 nekomutuoja su visais SU(3) grupės generatoriais, todėl, skirtingai nei ankstesniu homogeninės erdvės SU(3)/U(1) atveju, kvantuojama aštuonių parametrų SU(3) grupės daugdaroje.

Kaip ir anksčiau, solitoninį sprendinį (3.3) įdėję į Skyrme'os lagranžianą (1.1) ir jį apskaičiavę greičių kvadratų tikslumu, surandame metrinį tenzorių

$$g_{\alpha\beta}(q,F) = C'^{(L,M)}_{\alpha}(q)E_{(L,M)(L',M')}(F)C'^{(L',M')}_{\beta}(q), \tag{3.7}$$

kur

$$E_{(L,M)(L',M')}(F) = -(-1)^M a_L(F)\delta_{L,L'}\delta_{M,-M'}. \tag{3.8}$$

Solitono inercijos momentai užrašomi kaip integralai nuo bedimensinio kintamojo $\tilde{r} = ef_\pi r$:

$$a_1(F) = \frac{1}{e^3 f_\pi}\frac{8\pi}{3}\int \mathrm{d}\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F\left(1 + F'^2 + \frac{1}{\tilde{r}^2}\sin^2 F\right), \tag{3.9a}$$

$$\begin{aligned} a_2(F) = \frac{1}{e^3 f_\pi}\frac{8\pi}{5}\int \mathrm{d}\tilde{r}\tilde{r}^2\Big(&\sin^2 F\Big(3 + 2\cos 2F + (9 + 8\cos 2F)\,F'^2\Big) \\ &+ (9 + 4\cos 2F)\,\frac{\sin^2 F}{\tilde{r}^2}\Big). \end{aligned} \tag{3.9b}$$

Čia inercijos momentas $a_1(F)$ sutampa su SU(2) solitono inercijos momentu (2.12b), tačiau $a_2(F)$ skiriasi nuo antro SU(3) $\supset$ SU(2) skyrmiono momento.

Kanoninis impulsas apibrėžiamas standartiniu būdu:

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^\alpha, g_{\alpha\beta}\right\}. \tag{3.10}$$

Impulsai yra sujungtiniai koordinatėms ir tenkina komutacinius sąryšius $[p_\beta, q^\alpha] = -\mathrm{i}\delta_{\alpha\beta}$.

Aštuoni dešininės transformacijos generatoriai apibrėžiami taip:

$$\hat{R}_{(L,M)} = \frac{\mathrm{i}}{2}\Big\{p_\alpha, C'^{\alpha}_{(L,M)}(q)\Big\} = \frac{\mathrm{i}}{2}\Big\{\dot{q}^\beta, C'^{(L',M')}_{\beta}(q)\Big\}E_{(L',M')(L,M)}. \tag{3.11}$$

Jie tenkina (3.6) komutacinį sąryšį.

Solitoninį sprendinį (3.3) įdėję į Skyrme'os lagranžianą (1.1) ir suintegravę pagal erdvines koordinates, gauname efektyviojo lagranžiano išraišką:

$$\begin{aligned} L_{\text{eff}} = \frac{1}{2a_2(F)}(-1)^M \hat{R}_{(L,M)}\hat{R}_{(L,-M)} + \left(\frac{1}{2a_1(F)} - \frac{1}{2a_2(F)}\right) \\ \times (-1)^m\left(\hat{R}_{(1,m)}\cdot\hat{R}_{(1,-m)}\right) - M_{\text{cl}} - \Delta M_1 - \Delta M_2 - \Delta M_3, \end{aligned} \tag{3.12}$$

kur M_{cl} yra klasikinio skyrmiono masė, o $\Delta M_k = \int \mathrm{d}^3 x \Delta \mathcal{M}_k(F)$ – naujos kvantinės pataisos:

$$\Delta\mathcal{M}_1 = -\frac{2\sin^2 F}{a_1^2(F)}\left(f_\pi^2\left(2-\cos 2F\right)+\frac{3}{e^2}\left(F'^2\left(2+\cos 2F\right)+\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right); \tag{3.13a}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{M}_2 = &-\frac{2\sin^2 F}{a_2^2(F)}\left(f_\pi^2\left(14+11\cos 2F\right)+\frac{3}{e^2}\left(F'^2\left(42+41\cos 2F\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\left(25+12\cos 2F\right)\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right);\end{aligned} \tag{3.13b}$$

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{M}_3 = &-\frac{4\sin^2 F}{a_1(F)\cdot a_2(F)}\left(f_\pi^2\left(4+\cos 2F\right)+\frac{3}{e^2}\left(F'^2\left(6+5\cos 2F\right)\right.\right.\\ &\left.\left.+\left(1-\cos 2F\right)\frac{\sin^2 F}{r^2}\right)\right).\end{aligned} \tag{3.13c}$$

Naudojantis apibendrintų koordinačių ir greičių komutavimo savybėmis (1.7), surandama tiksli lagranžiano tankio išraiška

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} = \mathcal{K} - \mathcal{M}_{\mathrm{cl}} - \Delta\mathcal{M}_1 - \Delta\mathcal{M}_2 - \Delta\mathcal{M}_3, \tag{3.14}$$

kur $\mathcal{K}$ yra kinetinė (operatorinė) lagranžiano tankio dalis:

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = &\frac{4}{a_L^2(F)}(-1)^M \hat{R}_{(L,M)}\hat{R}_{(L,M')}\left\{\frac{f_\pi^2}{4}\left(\delta_{-M,M'} - D^L_{-M,M'}(\hat{x},F(r))\right)\right.\\ &+\frac{3}{e^2}\left(\delta_{-M,M'} - D^L_{-M,M'}(\hat{x},F(r))\right)\left\{\left(F'^2 - \frac{1}{r^2}\sin^2 F\right)\right.\\ &\times\frac{2\sqrt{\pi}(2L+1)\sqrt{\frac{1}{2}l+1}}{\sqrt{3}(5-2L)\sqrt{2l+1}}(-1)^{L+M+\frac{1}{2}l+1}\begin{Bmatrix}1 & 1 & l\\ L & L & L\end{Bmatrix}\\ &\left.\left.\times\begin{bmatrix}L & L & l\\ M & M' & m\end{bmatrix}Y_{l,m}(\theta,\varphi)+\frac{1}{r^2}\sin^2 F\frac{1}{(5-2L)}\delta_{-M,M'}\right\}\right\}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Čia esanti Wigner'io $D^L_{M,M'}(\hat{x},F(r))$ matrica yra anksčiau apibrėžtas solitoninis sprendinys (3.3) neredukuotiniuose įvaizdžiuose $L = 1{,}2$.

Apibrėžus kanoninio impulso tankį $\mathcal{P}_\beta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\beta}$, hamiltoniano tankį galima užrašyti taip:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left\{\mathcal{P}_\beta, \dot{q}^\beta\right\} - \mathcal{L}_{\mathrm{Sk}} = \mathcal{K} + \mathcal{M}_{\mathrm{cl}} + \Delta\mathcal{M}_1 + \Delta\mathcal{M}_2 + \Delta\mathcal{M}_3. \tag{3.16}$$

Operatorinė lagranžiano (3.12) ir hamiltoniano kinetinė dalis priklauso nuo kvadratinių SU(3) ir SO(3) grupių Casimir'o operatorių, kurie išreiškiami dešininės transformacijos generatoriais (3.11). Hamiltoniano $H = \int \mathrm{d}^3 x \mathcal{H}$ tikrinės vertės yra

$$\left| \begin{matrix} (\Lambda,\Theta) \\ \alpha,S,N;\beta,S',N' \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\dim(\Lambda,\Theta)}\, D^{*(\Lambda,\Theta)}_{(\alpha,S,N)(\beta,S',N')}(q)\left|0\right\rangle, \tag{3.17}$$

kur kompleksiškai sujungtiniai neredukuotinio įvaizdžio (Λ,Θ) Wigner'io matricos elementai priklauso nuo aštuonių kvantinių kintamųjų q^β. Indeksai α ir β žymi SO(3) grupės multipletus.

Chiralinės simetrijos efektus įskaitėm įvesdami simetrijos pažeidimo narį

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathrm{SB}} &= \frac{1}{4N} f_\pi m_0^2 \,\mathrm{Tr}\Big(U + U^\dagger - 2\Big) \\ &= \frac{1}{2} f_\pi m_0^2 \sin^2 F. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Su nekanoniškai įdėtu SO(3) solitonu Wess-Zumino narys L_{WZ} yra lygus nuliui.

4. Nekanoniškai įdėtas racionalaus atvaizdžio solitonas kvantiniame SU(3) Skyrme'os modelyje

Šiame skyriuje nagrinėjamas Skyrme'os modelis su nekanoniškai įdėtu SU(3) $\supset$ SO(3) solitonu racionalaus atvaizdžio artinyje, kai sprendinio barioninis krūvis $B \geq 2$. Kaip ir ankstesniame skyriuje, unitarųjį lauką $U(\mathbf{x},t)$ nagrinėjame tik fundamentaliame SU(3) grupės įvaizdyje (1,0). Chirališkai simetrinis lagranžianas užrašomas standartine forma (1.1), o dešininė srovė apibrėžiama (3.1) išraiška. Nekanoniniai SU(3) grupės generatoriai išreiškiami kanoniniais generatoriais $J^{(1,1)}_{(Z,I,M)}$ (3.5).

Nagrinėjamo modelio SO(3) grupės racionalaus atvaizdžio solitoninis sprendinys užrašomas kaip matrica

$$\begin{aligned}(U_R)_{M,M'} &= D^1_{M,M'}(\varkappa) = \big(\exp(2\mathrm{i}\hat{n}_a J_{(1,a)} F(r))\big)_{M,M'}\\ &= 2\sin^2 F(-1)^M \hat{n}_{-M}\hat{n}_{M'} + \mathrm{i}\sqrt{2}\sin 2F \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ M & u & M' \end{bmatrix} \hat{n}_u\\ &\quad + \cos 2F\, \delta_{M,M'}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

kur vienetinis vektorius $\hat{\mathbf{n}}$ yra apibrėžiamas [19] dėmenimis racionalios kompleksinės funkcijos $R(z)$, kurios kompleksinis argumentas gali būti išreiškiamas polinėmis koordinatėmis $z = \tan(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$:

$$\hat{\mathbf{n}}_R = \frac{1}{1+|R|^2}\Big\{2\Re(R), 2\Im(R), 1-|R|^2\Big\}. \tag{4.2}$$

Eulerio kampai $\varkappa$ apibrėžiami vektoriumi $\hat{\mathbf{n}}$ ir funkcija $F(r)$. Diferencijuojant vektorių $\hat{\mathbf{n}}$ gaunama išraiška

$$(-1)^s(\nabla_{-s} r\hat{n}_m)(\nabla_s r\hat{n}_{m'}) = \hat{n}_m\hat{n}_{m'} + \mathcal{I}\left((-1)^m\delta_{-m,m'} - \hat{n}_m\hat{n}_{m'}\right) \tag{4.3}$$

kur simbolis $\mathcal{I}$ yra integralas nuo kompleksinių kintamųjų:

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4\pi}\int\left(\frac{1+|z|^2}{1+|R|^2}\left|\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}z}\right|\right)^4 \frac{2\mathrm{i}\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}}{(1+|z|^2)^2}\,. \tag{4.4}$$

$\mathcal{I}$ priklauso tik nuo racionalaus atvaizdo R, t.y. nuo polinių koordinačių θ bei φ ir gali būti traktuojamas kaip Morse funkcija.

Į racionalaus atvaizdžio barioninio krūvio tankio išraišką įeina funkcija $\mathcal{I}$

$$\mathcal{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{24\pi^2}\epsilon^{0k\ell m}\,\mathrm{Tr}\Big(R_k R_\ell R_m\Big) = -\frac{\mathcal{I}\,(\theta,\varphi)}{2\pi^2}\frac{F'(r)\sin^2 F}{r^2}, \tag{4.5}$$

kurios integralas nuo erdvinių kampų yra proporcingas barioniniam krūviui [20]:

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\; \mathcal{I}\sin\theta = 4\pi B. \tag{4.6}$$

Įdėjus solitoninį sprendinį (4.1) į Skyrme'os lagranžiano tankio išraišką (1.1), gaunamas klasikinis Skyrme'os lagranžianas bet kuriam barioniniui skaičiui B:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathrm{cl}}(r,\theta,\varphi) = -\,\mathcal{M}_{\mathrm{cl}} = -2f_\pi^2\left(F'^2(r) + \frac{2\mathcal{I}\sin^2 F}{r^2}\right)\\ -\frac{4}{e^2}\frac{\mathcal{I}\sin^2 F}{r^2}\left(F'^2(r) + \frac{\mathcal{I}\sin^2 F}{2r^2}\right).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Modelis kvantuojamas pagal ankstesniame skyriuje aprašytą schemą. Solitoninį sprendinį (4.1) įdėję į Skyrme'os lagranžianą (1.1), apskaičiuojame lagranžianą greičių kvadratų tikslumu

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^{\alpha} g_{\alpha\beta}(q,F)\dot{q}^{\beta} + a^0 \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^{\alpha}, C_{\alpha}^{\prime(2,0)}(q)\right\} + \mathcal{O}\Big((\dot{q})^0\Big), \tag{4.8}$$

kur metrinis tenzorius $g_{\alpha\beta}(q,F)$ ir tarpinė funkcija $E_{(L,M)(L',M')}$ yra pateikti (3.7) ir (3.8) formulėse. Paminėtina, kad $g_{\alpha\beta}$ apskaičiavimui nebūtina žinoti tikslios koeficiento a^0 išraiškos. Racionalaus atvaizdžio solitoninio sprendinio atveju gaunami penki skirtingi solitono inercijos momentai:

$$a_{(1,0)}(F) = \frac{1}{e^3 f_\pi}\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F \left(n_0^2 - 1\right)\left(1 + F'^2 + \frac{\mathcal{I}}{r^2}\sin^2 F\right), \tag{4.9a}$$

$$a_{(1,1)}(F) = \frac{1}{2e^3 f_\pi}\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F \left(n_0^2 + 1\right)\left(1 + F'^2 + \frac{\mathcal{I}}{r^2}\sin^2 F\right), \tag{4.9b}$$

$$\begin{aligned} a_{(2,0)}(F) = \frac{1}{e^3 f_\pi}\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F \left(n_0^2 - 1\right)\Big(&\cos^2 F + n_0^2 \sin^2 F \\ &- \left(n_0^2 - 4\cos^2 F + 2n_0^2 \cos 2F\right) F'^2 \\ &+ \frac{\mathcal{I}}{r^2}\sin^2 F\left(2\cos^2 F + n_0^2(4 - \cos 2F)\right)\Big), \end{aligned} \tag{4.9c}$$

$$\begin{aligned} a_{(2,1)}(F) = \frac{1}{2e^3 f_\pi}\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F\Big(&3 + 2\cos 2F - 3n_0^2 + 4n_0^4 \sin^2 F \\ &+ \left(9 + 8\cos 2F - 3n_0^2 - 4n_0^4(1 + 2\cos 2F)\right) F'^2 \\ &+ \frac{\mathcal{I}}{r^2}\sin^2 F\left(9 + 4\cos 2F - 15n_0^2 + 4n_0^4(4 - \cos 2F)\right)\Big), \end{aligned} \tag{4.9d}$$

$$\begin{aligned} a_{(2,2)}(F) = \frac{1}{4e^3 f_\pi}\int \mathrm{d}^3\tilde{r}\tilde{r}^2 \sin^2 F\Big(&-\cos 2F - 12n_0^2\cos^2 F + 2n_0^4 \sin^2 F \\ &- 3 - 2\left(3 + 2\cos 2F - 24n_0^2\cos^2 F + n_0^4(1 + 2\cos 2F)\right) F'^2 \\ &- \frac{2\mathcal{I}}{r^2}\sin^2 F\left(6 + \cos 2F - 12n_0^2\cos^2 F - n_0^4(4 - \cos 2F)\right)\Big), \end{aligned} \tag{4.9e}$$

priklausantys nuo funkcijos $F(r)$, racionalaus atvaizdžio vektoriaus komponentės n_0 ir funkcijos $\mathcal{I}(\theta,\varphi)$.

Apibrėžiami aštuoni kanoniniai impulsai

$$p_\beta = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\beta} = \frac{1}{2}\left\{\dot{q}^\alpha, g_{\alpha\beta}\right\} + a^0 C_\beta^{\prime(2,0)}(q), \tag{4.10}$$

kurie nekomutuoja ir turi dėmenis, neturinčius greičių.

Kvantinis lagranžiano tankis gaunamas anksčiau aprašytu būdu, kai laukas (1.6) įstatomas į Skyrme'os lagranžiano tankį (1.1):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(q,\dot{q},\varkappa) = &\Big\{\dot{q}^{\alpha},C'^{(L,M_1)}_{\alpha}(q)\Big\}\Big\{\dot{q}^{\beta},C'^{(L,M_2)}_{\beta}(q)\Big\}\mathcal{V}_1(\varkappa)\\ &+\mathrm{i}\Big\{\dot{q}^{\alpha},C'^{(L,M_1)}_{\alpha}(q)\Big\}\mathcal{V}_2(\varkappa)+\mathcal{V}_3(\varkappa)-\mathcal{M}_{\mathrm{cl}}.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Čia $\mathcal{V}_k(\varkappa)$ yra po kanoninio kvantavimo gaunamos kvantinės pataisos, priklausančios nuo funkcijos $F(r)$, racionalaus atvaizdžio vektoriaus $\hat{\mathbf{n}}$ ir funkcijos $\mathcal{I}(\theta,\varphi)$. Šių pataisų išraiškos yra gana didelės, todėl disertacijos santraukoje jų nepateikiame.

Lagranžiano tankį (4.11) suintegravus pagal laikinius kintamuosius, gaunamas modelio lagranžianas

$$\begin{aligned}L = &\frac{1}{8}\Big\{\dot{q}^{\alpha},C'^{(L_1,M_1)}_{\alpha}(q)\Big\}E_{(L_1M_1)(L_2M_2)}\Big\{\dot{q}^{\beta},C'^{(L_2,M_2)}_{\beta}(q)\Big\}\\ &+\mathrm{i}\Big\{\dot{q}^{\alpha},C'^{(2,0)}_{\alpha}(q)\Big\}V_2+V_3-M_{\mathrm{cl}},\end{aligned} \tag{4.12}$$

kur $V_k = \int \mathrm{d}^3x\mathcal{V}_k(\varkappa)$.

Galima parinkti tokią parametrizaciją ant SU(3) grupės daugdaros, kad aštuoni dešininės transformacijos operatoriai

$$\begin{aligned}\hat{R}_{(LM)} &= \frac{\mathrm{i}}{2}\left\{p_{\beta},C'^{\beta}_{(L,M)}(q)\right\}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{2}E_{(LM)(L'M')}\left\{\dot{q}^{\alpha},C'^{(L'M')}_{\alpha}(q)\right\}-2\delta_{(2,0)(LM)}V_2,\end{aligned} \tag{4.13}$$

kaip ir grupės generatoriai (3.5), tenkintų komutavimo sąryšį

$$\left[\hat{R}_{(L_1M_1)},\hat{R}_{(L_2M_2)}\right] = -2\sqrt{3}\begin{bmatrix}(1,1) & (1,1) & (1,1)_a\\ (L_1M_1) & (L_2M_2) & (LM)\end{bmatrix}\hat{R}_{(LM)}. \tag{4.14}$$

Naudodamiesi Sugano išvystyta perėjimo nuo lagranžiano prie hamiltoniano metodika ir iš tikslios lagranžiano išraiškos (4.12) suradę (4.10) išraiškoje neįvardytą koeficientą $a^0 = 2\mathrm{i}V_2$, užrašome kvantinį hamiltonianą:

$$\begin{aligned} H =& \frac{1}{8}\left\{\dot{q}^{\alpha},C'^{(L_1,M_1)}_{\alpha}(q)\right\}E_{(L_1M_1)(L_2M_2)}\left\{\dot{q}^{\beta},C'^{(L_2,M_2)}_{\beta}(q)\right\} - V_3 + M_{\mathrm{cl}} \\ =& -\frac{1}{2}\hat{R}_{(L_1M_1)}E^{(L_1M_1)(L_2M_2)}\hat{R}_{(L_2M_2)} - \frac{2V_2}{a_{(2,0)}}\hat{R}_{(2,0)} \\ & -2\left(\frac{V_2}{a_{(2,0)}}\right)^2 - V_3 + M_{\mathrm{cl}}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Būsenos vektorius apibrėžiame kaip įvaizdžio (Λ,Θ) Wigner'io matricos elementus, priklausančius nuo aštuonių kvantinių kintamųjų q^{β}:

$$\left|\begin{matrix}(\Lambda,\Theta)\\ \alpha,S,N;\beta,S',N'\end{matrix}\right\rangle = \sqrt{\dim(\Lambda,\Theta)}D^{*(\Lambda,\Theta)}_{(\alpha,S,N)(\beta,S',N')}(q)\left|0\right\rangle. \tag{4.16}$$

Indeksai α ir β žymi SO(3) grupės multipletus. Dėl penkių skirtingų solitono inercijos momentų vektoriai (4.16) nėra hamiltoniano (4.15) tikriniai būsenos vektoriai. Hamiltoniano veikimas į būsenos vektorius (4.16) gali būti išreiškiamas inercijos momentų $a_{(L,M)}$ dėmenimis ir SU(3) grupės nekanoniniais Clebsch-Gordan'o koeficientais.

Pagrindiniai rezultatai ir išvados

1. Topologinis Skyrme'os modelis apibendrintas bet kuriam SU(3) grupės neredukuotiniam įvaizdžiui (λ,μ). Jeigu klasikiniam modelyje priklausomybė nuo įvaizdžio išreiškiama bendru daugikliu prieš Lagrange'o funkciją, tai kanoniškai kvantuojant kvantinės pataisos esminiai priklauso nuo įvaizdžio. Įvaizdį (λ,μ) galima traktuoti kaip naują diskretinį modelio fenomenologinį parametrą.

2. Wess-Zumino nario priklausomybė nuo neredukuotinio įvaizdžio (λ,μ) išreiškiama daugikliu, proporcingu SU(3) grupės trečiojo laipsnio Casimir'o operatoriaus tikrinei vertei. Dėl to sau sujungtiniams įvaizdžiams $(\lambda = \mu)$ Wess-Zumino narys išnyksta.

3. Simetriją pažeidžiančio nario Lagrange'o operatoriaus funkcinė priklausomybė nuo funkcijos $F(r)$ įvairuoja skirtingiems įvaizdžiams. Sau sujungtiniams įvaizdžiams simetriją pažeidžiantis narys supaprastėja iki SU(2) Skyrme'os modeliui įprastos formos.

4. Įvestas naujas Skyrme'os modelio solitoninis sprendinys, kuris apibrėžtas nekanoninėje SU(3) $\supset$ SO(3) bazėje. Kanoniškai kvantuojant gaunamos naujos kvantinių pataisų išraiškos ir du skirtingi solitono inercijos momentai, iš kurių vienas sutampa su SU(2) solitono momentu. Wess-Zumino narys nekanoniškai įdėtam SO(3) solitonui visada lygus nuliui.

5. Išnagrinėtas Skyrme'os modelio nekanoniškai įdėtas solitonas racionalaus atvaizdžio artinyje, kai barioninis krūvis $B \geq 2$. Kanoniškai kvantuojant gaunami penki skirtingi solitono inercijos momentai ir kvantinės pataisos. Aukštesniems įvaizdžiams Hamiltono operatorius nėra diagonalus nekanoninės bazės būsenų atžvilgiu. Šis artinys gali būti panaudotas aprašyti lengvuosius branduolius kaip specialius solitonus.

Disertacijos tema publikuoti straipsniai

1. D. Jurčiukonis and E. Norvaišas, Quantum SU(3) Skyrme model with noncanonical embedded SO(3) soliton, J. Math. Phys., **48**, 052101 (2007).

2. D. Jurčiukonis and E. Norvaišas, Quantum SU(3) Skyrme model for arbitrary representation, Bulg. J. Phys., **33** (s1b), 933 (2006).

3. D. Jurčiukonis, E. Norvaišas and D.O. Riska, Canonical quantization of SU(3) skyrme model in a general representation, J. Math. Phys., **46**, 072103 (2005).

Disertacinio darbo rezultatai pristatyti mokslinėse konferencijose

1. „V. International Symposium Quantum Theory and Symmetries (QTS-5)", Valladolid, July 22–28, 2007.

2. „37$^{\text{oji}}$ Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija", Vilnius, birželio 11–13 d., 2007.

3. „26$^{\text{th}}$ International Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics", New York, June 26–30, 2006.

4. „IV. International Symposium Quantum Theory and Symmetries (QTS-4)“, Varna, August 15–21, 2005.

5. „6$^{\mathrm{th}}$ Nordic Summer School in Nuclear Physics“, Copenhagen, August 8–19, 2005.

6. „36$^{\mathrm{oji}}$ Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija“, Vilnius, birželio 16–18 d., 2005.

7. „Physics in Warsaw 2004“, Summer school, Warsaw, September 20 – October 02, 2004.

8. „Conference on Computational Physics 2004 (CCP-2004)“, Genoa, September 01–04, 2004.

9. „35$^{\mathrm{oji}}$ Lietuvos nacionalinė fizikos konferencija“, Vilnius, birželio 12–14 d., 2003.

Literatūra

[1] T. H. R. Skyrme, A non-linear field theory, Proc. Roy. Soc. A **260**, 127 (1961).

[2] T. H. R. Skyrme, A unified field theory of mesons and baryons, Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).

[3] E. Witten, Current algebra, baryons, and quark confinement, Nucl. Phys. B **223**, 433 (1983).

[4] A. P. Balachandran, A. Barrducci, F. Lizzi, V. G. J. Rodgers, and A. Stern, Doubly strange dibaryon in the chiral model, Phys. Rev. Lett. **52**, 887 (1984).

[5] G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten, Static properties of nucleons in the Skyrme model, Nucl. Phys. B **228**, 552 (1983).

[6] S. L. Sondhi, A. Karlhede, S. A. Kivelson, and E. H. Rezayi, Skyrmions and the crossover from the integer to fractional quantum Hall effect at small Zeeman energies, Phys. Rev. B **47**, 16419 (1993).

[7] U. A. Khawaja and H. Stoof, Skyrmions in ferromagnetic Bose-Einstein condensate, Nature **411**, 918 (2001).

[8] N. Shiiki and N. Sawado, Black hole Skyrmions with a negative cosmological constant, Phys. Rev. D **71**, 104031 (2005).

[9] K. Fujii, A. Kobushkin, K. Sato, and N. Toyota, Quantum-mechanical treatment of the Skyrme Lagrangean, and a new mass term, Phys. Rev. Lett. **58**, 651 (1987).

[10] T. Ohtani and R. Sugano, Q-Number variational method for nonlinear Lagrangian in quantum mechanics, Prog. Theor. Phys. **50**, 1715 (1973).

[11] E. Norvaišas and D. O. Riska, Representations of general dimension for the Skyrme model, Physica Scripta **50**, 634 (1994).

[12] A. Acus, E. Norvaišas, and D. O. Riska, The quantum skyrmion in representations of general dimension, Nucl. Phys. A **614**, 361 (1997).

[13] A. Acus, E. Norvaišas, and D. Riska, Stability and representation dependence of the quantum skyrmion, Phys. Rev. C **57**, 2597 (1998).

[14] R. Sugano, On consistency between Lagrange and Hamilton formalisms in quantum mechanics (case of non-relativistic velocity-dependent potential), Prog. Theor. Phys. **46**, 297 (1971).

[15] E. Witten, Global aspects of current algebra, Nucl. Phys. B **223**, 422 (1983).

[16] P. O. Mazur, M. A. Nowak, and M. Praszalowicz, SU(3) extension of the Skyrme model, Phys. Lett. B **147**, 137 (1984).

[17] A. P. Balachandran, F. Lizzi, and V. G. J. Rodgers, Dibaryons as chiral solitons, Nucl. Phys. B **256**, 525 (1985).

[18] J. P. Elliott, Collective motion in the nuclear shell model, I, Proc. Phys. Soc. A **245**, 128 (1958).

[19] C. Houghton, N. Manton, and P. Sutcliff, Rational maps, monopoles and skyrmions, Nucl. Phys. B **510**, 507 (1998).

[20] A. Acus, E. Norvaišas, and D. O. Riska, The α particle as a canonically quantized multiskyrmion, Phys. Rev. C **74**, 025203 (2006).

Summary

This thesis consists of the preface, review, and mathematical formulation of the Skyrme model, three main chapters, concluding statements, four appendices, and a list of references.

The motivation and the main goals of the dissertation are presented in the **Preface**. This chapter also contains the main goals of the research work and presents the scientific novelty of the dissertation, the thesis statements, and the approbation of the results.

A brief historical remarks of the Skyrme model origin and the development are presented in **Chapter I**. This chapter contains a description of the nonlinear sigma model and the mathematical formulation of the classical Skyrme model. A description of the rational map approximation, generalization of the Skyrme model, mathematical aspects of the Wess-Zumino term, and a description of the quantization of the model are also given in this chapter.

Chapter II presents an extension of the canonically quantized Skyrme model to general irreducible representations of the SU(3) group. The focus is on the mathematical aspects of the model, and on the derivation of both the Hamiltonian density and the Hamiltonian, in order to elucidate their representation dependence. In contrast to the case of SU(2), the solutions to the SU(3) Skyrme model depend on the dimension in an essential way. Remarkably the Wess-Zumino term vanishes in all self-adjoint irreducible representations of SU(3), as it is proportional to the cubic Casimir operator. In the self adjoint irreducible representations the symmetry breaking mass term in the model reduces to the SU(2) form.

Chapter III discusses the group-theoretical aspects of the canonical quantization of the SU(3) Skyrme model with a new SO(3) ansatz. The ansatz is defined in the noncanonical SU(3) $\supset$ SO(3) base. The canonical quantization of the soliton leads to two moments of inertia. One of them coincides with the SU(2) soliton moment of inertia. New expressions of quantum mass corrections are obtained as well. For the noncanonically embedded SO(3) soliton the Wess-Zumino term is equal to zero.

Chapter VI describes a new rational map approximation ansatz for the Skyrme model which is the noncanonically embedded SU(3) $\supset$ SO(3) soliton with the baryon number $B \geq 2$. The canonical quantization leads to five different moments of inertia and new quantum corrections. The state vectors are defined as the SU(3) group representation (Λ,Θ) matrix depending on eight quantum variables q^i because the ansatz does not

commute with any generator of the group. The proposed ansatz can be used to describe light nuclei as special skyrmions.

Concluding statements:

1. The canonically quantized Skyrme model is extended to general irreducible representations (λ,μ) of SU(3), which can be treated as new discrete phenomenological parameters. In the classical case the representation dependence is a common factor in the Lagrangian, while the quantum corrections essentialy depend on the representation in the quantum case.

2. The representation dependence of the Wess-Zumino term arises into an factor, which is proportional to the cubic Casimir operator value, with an exception of the self adjoint irreducible representations in when this term vanishes.

3. The symmetry breaking term has a diverse functional dependence on the profile function $F(r)$ in different irreducible representations (λ,μ). In the case of self adjoint representations the symmetry breaking term reduces to the SU(2) form.

4. The new ansatz for the Skyrme model, which is defined in the noncanonical SU(3) $\supset$ SO(3) bases, is introduced. The canonical quantization of the soliton leads to two moments of inertia one of which coincides with the SU(2) soliton moments of inertia, and new expressions of the quantum mass corrections. For the noncanonically embedded SO(3) soliton the Wess-Zumino term is equal to zero.

5. The rational map approximation ansatz for the Skyrme model, of the noncanonically embedded SU(3) $\supset$ SO(3) soliton with the baryon number $B \geq 2$, is investigated. Five different quantum moments of inertia and new quantum mass corrections follow from the canonical quantization. Because of five different moments of inertia the state vectors are not the eigenvectors of the Hamiltonian for higher representations. The explored ansatz can be used to describe light nuclei as special skyrmions.

Trumpos žinios apie doktorantą

Vardas, pavardė: Darius Jurčiukonis

Gimimo data: 1979 02 15

El. paštas: `darius@itpa.lt`

Išsilavinimas ir kvalifikacija:

1997 – 2001	Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Bakalauro kvalifikacinis laipsnis.
2001 – 2003	Vilniaus universitetas, Fizikos fakultetas, Magistro kvalifikacinis laipsnis.
2003 – 2007	Doktorantūra Vilniaus universiteto Teorinės fizikos ir astronomijos institute.

Darius Jurčiukonis

SU(3) TOPOLOGINIŲ SOLITONŲ KANONINIS KVANTAVIMAS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, fizika (02 P), matematinė ir bendroji teorinė fizika, klasikinė mechanika, kvantinė mechanika, reliatyvizmas, gravitacija, statistinė fizika, termodinamika (190 P)

Spausdino Vilniaus universiteto leidyklos spaustuvė
Universiteto g. 1, LT–01122 Vilnius
http://www.leidykla.vu.lt